Licence de Mathématiques **Probabilités et Statistiques**

correction de l'examen du 22 juin 2020

Exercice 1

1. D'après le théorème de transfert, $\mathbb{E}\ln X_1 = \sum_{k=2}^{4}\mathbb{P}(X_1 = k)\ln k = \frac{1}{3}\ln 2 + \frac{1}{3}\ln 3 + \frac{1}{3}\ln 4 = \frac{3\ln 2+\ln 3}{3}$.
2. On a
$$\ln Q_n = \ln X_1 + \ln X_2 + \cdots + \ln X_n.$$
Comme les $(X_n)_{n\geq 1}$ sont des variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur l'ensemble $\{2,3,4\}$, les $(\ln X_n)_{n\geq 1}$ sont des variables aléatoires indépendantes suivant la loi image de la loi uniforme sur l'ensemble $\{2,3,4\}$ par l'application $x \mapsto \ln x$. D'après la loi forte des grands nombres, on a donc
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln Q_n}{n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{\ln X_1 + \ln X_2 + \cdots + \ln X_n}{n} = \mathbb{E}\ln X_1 \text{ p.s..}$$
En prenant l'exponentielle, on obtient
$$\lim_{n\to+\infty} Q_n^{1/n} = \exp(\frac{3\ln 2+\ln 3}{3}) = 2\sqrt[3]{3} \text{ p.s.}$$

Exercice 2

Pour tout $r > 0$, on a $\mathbb{P}(R > r) = 1-\mathbb{P}(R \geq r) = 1-(\mathbb{P}(R < r)+\mathbb{P}(R = r))$. $\mathbb{P}(R = r) = \mathbb{P}((X,Y) \in \mathcal{C}_r)$, où $\mathcal{C}_r$ est le cercle centré en l'origine et de rayon r. Mais un cercle est de mesure de Lebesgue nulle, donc $\mathbb{P}(R = r) = 0$. Ainsi $\mathbb{P}(R > r) = 1 - \mathbb{P}(R < r)$, donc $(\mathbb{P}(R > r) = \mathbb{P}(R < r)) \iff \mathbb{P}(R < r) = \frac{1}{2}$. $\mathbb{P}(R < r) = \mathbb{P}((X,Y) \in D_r)$ om D_r est le disque ouvert centré en l'origine et de rayon R. Comme (X,Y) suit la loi uniforme sur D, on a pour tout $r \in [0,1[$
$$\mathbb{P}((X,Y) \in D_r) = \frac{\lambda(D_r \cap D)}{\lambda(D)} = \frac{\lambda(D_r)}{\lambda(D)} = \frac{\pi r^2}{\pi 1^2} = r^2.$$
Ainsi, on voit aisément qu'il suffit de prendre $r = \frac{1}{\sqrt{2}}$ pour avoir l'identité demandée.

Exercice 3

1. (a) D'après le théorème de transfert, on a pour tout nombre complexe z : on a

$$g(z) = \mathbb{P}(X_1 = 1)e^{1.z} + \mathbb{P}(X_1 = -1)e^{-1.z} = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \cosh z.$$

   (b) $\phi_{X_1}(t) = \mathbb{E}e^{itX_1} = g(it) = \cosh it = \cos t$ et $\phi_{X_1}(t) = \mathbb{E}e^{itX_1} = \phi_{X_1}(-t) = \cos -t = \cos t$.

   (c) $S_n = X_1 + \dots + X_n$ est une somme de variable aléatoires indépendantes, donc $\phi_{S_n}(t) = \phi_{X_1}(t)\dot{\phi}_{X_n}(t)$. Comme $X_1, \dots X_n$ ont la même li, elles ont la même fonction caractéristique, donc $\phi_{S_n}(t) = \phi_{X_1}(t)^n = (\cos t)^n$. De la même manière $-S_n = (-X_1) + \dots + (-X_n)$ est une somme de n variable aléatoires indépendantes ayant la même loi que $-X_1$ donc $\phi_{-S_n}(t) = \phi_{-X_1}(t)^n = (\cos t)^n$. S_n et $-S_n$ ont la me fonction caractéristique donc elles ont la même loi.

2. On a

$$g(u) = \cosh u = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u^{2n}}{(2n)!}$$

et

$$\exp(u^2/2) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\left(\frac{u^2}{2}\right)^n}{n!} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u^{2n}}{2^n n!}$$

Or pour tout $n \geq 1$, on a

$$\frac{u^{2n}}{(2n)!} = \frac{u^{2n}}{2^n n!} \frac{2 \quad . \ 2 \qquad \dots \quad 2}{(n+1).(n+2)\dots(2n)} \leq \frac{u^{2n}}{2^n n!}$$

En sommant les inégalités, on obtient bien que $g(u) \leq \exp \frac{u^2}{2}$.

3. Soit n un entier strictement positif et $\alpha > 0$.

   (a) Soit $u \geq 0$ $(S_n \geq n\alpha) \Longrightarrow \exp(uS_n) \geq \exp(n\alpha a)$, Donc

$$\mathbb{P}(S_n \geq n\alpha) \leq \mathbb{P}(\exp(uS_n) \geq \exp(n\alpha a))$$

$\exp(uS_n)$ est à valeurs positives, donc d'après l'inégalité de Markov

$$\mathbb{P}(\exp(uS_n) \geq \exp(n\alpha a)) \leq \frac{\mathbb{E}\exp(uS_n)}{\exp(n\alpha u)}.$$

On a $\exp(uS_n) = \prod_{k=1}^n \exp(uX_k)$: Les variables aléatoires $(\exp(uX_k))_{1\leq k\leq n}$ sont indépendantes car les $(X_k)_{1\leq k\leq n}$ sont indépendantes. On a donc $\exp(uS_n) = \prod_{k=1}^n \mathbb{E}\exp(uX_k)$ Mais ces variables aléatoires ont toutes la même loi – la loi image de $\frac{1}{2}(\delta_1 + \delta_{-1})$ par l'application $x \mapsto \exp(ux)$: on a donc $\exp(uS_n) = \mathbb{E}\exp(uX_1)^n = g(u)^n$. On a bien finalement

$$\forall u \in \mathbb{R}_+ \quad \mathbb{P}(S_n \geq n\alpha) \leq \frac{g(u)^n}{e^{n\alpha u}}$$

(b) En utilisant la majoration que l'on a pour g, on obtient

$$\forall u \in \mathbb{R}_+ \quad \mathbb{P}(S_n \geq n\alpha) \leq \frac{\exp(n\frac{u^2}{2})}{e^{n\alpha u}}$$

En particulier, pour le choix $u = \alpha$, on obtient l'inégalité

$$\mathbb{P}(S_n \geq n\alpha) \leq \exp(-n\frac{\alpha^2}{2}).$$

(c) On a

$$\mathbb{P}(|S_n| \geq n\alpha) = \mathbb{P}(S_n \geq n\alpha) + \mathbb{P}(-S_n \leq n\alpha)$$

Mais on a vu que S_n et $-S_n$ ont même loi : on a donc $\mathbb{P}(S_n \geq n\alpha) = \mathbb{P}(-S_n \leq n\alpha)$, d'où

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(|S_n| \geq n\alpha) &= 2\mathbb{P}(S_n \geq n\alpha) \\ &\leq 2\exp(-n\frac{\alpha^2}{2}). \end{aligned}$$

4. Soit $\epsilon > 0$. On va montrer que

$$\mathbb{P}(\limsup_{n\to+\infty} |\frac{S_n}{n^\beta}| \geq \epsilon) = 0.$$

$\beta > \frac{1}{2}$. Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{S_n}{n^\beta} = 0 \text{ presque sûrement.}$$

Pour cela, le lemme de Borel Cantelli nous dit qu'il suffit de montrer que la série de terme général $\mathbb{P}(|\frac{S_n}{n^\beta}| \geq \epsilon)$ converge.
On a $\mathbb{P}(|\frac{S_n}{n^\beta}| \geq \epsilon) = \mathbb{P}(|S_n| \geq n\alpha)$ où l'on a posé $\alpha = \epsilon n^{\beta-1}$. On a donc

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(|\frac{S_n}{n^\beta}| \geq \epsilon) &\leq 2\exp(-n\frac{\alpha^2}{2}) \\ &\leq 2\exp(-\frac{\epsilon^2}{2}n^{2\beta-1}) \end{aligned}$$

Comme $\frac{n^{2\beta-1}}{\ln n}$ tend vers $+\infty$ lorsque n tend l'infini, on a $\frac{n^{2\beta-1}}{\ln n} \geq \frac{4}{\epsilon^2}$ dès que n est assez grand : on a alors $\frac{\epsilon^2}{2}n^{2\beta-1} \geq 2\ln n$, d'où $\exp(-\frac{\epsilon^2}{2}n^{2\beta-1}) \leq \frac{1}{n^2}$, ce qui assure que la série de terme général $\mathbb{P}(|\frac{S_n}{n^\beta}| \geq \epsilon)$ converge, et donc que

$$\mathbb{P}(\limsup_{n\to+\infty} |\frac{S_n}{n^\beta}| \geq \epsilon) = 0.$$

Comme on a ce résultat pour tout $\epsilon > 0$, le critère fondamental de convergence presque sûre nous permet de dire que $\frac{S_n}{n^\beta}$ tend presque sûrement vers 0.

FIN