SUJET D'EXAMEN TERMINAL

DIPLOME : Licence de Mathématiques	Durée du sujet : 1H 30
UE : Probabilités et Statistiques	Nom du rédacteur : O. GARET
Semestre : 6	
Epreuve de :	■ 2 pages autorisées
Session ......1........	☐ Documents non autorisés
Date : 18 mai 2021	☐ Calculatrices autorisées
Horaire : 10H30–12H00	■ Calculatrice non autorisée

Barème approximatif : exercice 1, 10 points – exercice 2, 10 points.

Rappels et notations.

Toutes les variables sont définies sur un même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

On appelle fonction de queue d'une variable aléatoire réelle X la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$Q_X(t) = \mathbb{P}(X > t).$$

Exercice 1

1. Soit $a > 0$ et X une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre a (notée $\mathcal{E}(a)$). Calculer la transformée de Laplace de X (notée L_X) sur $\mathbb{R}_+$.
2. On suppose maintenant que X et Y sont des variables aléatoires indépendantes, avec $X \sim \mathcal{E}(a)$ et $Y \sim \mathcal{E}(b)$ avec $a, b > 0$.
   (a) Déterminer les fonctions Q_X, Q_Y, $Q_{\min(X,Y)}$. Quelle est la loi de $\min(X, Y)$?
   (b) Calculer $\mathbb{P}(X < Y)$.
   (c) Si X_1, X_2, X_3 sont des variables aléatoires indépendantes avec pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$, $X_i \sim \mathcal{E}(i)$, que vaut

$$\mathbb{P}(\min(X_1, X_2) < X_3) \quad ?$$

Exercice 2 Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une suite de variables aléatoires positives convergeant presque sûrement vers 0. Le but de l'exercice est de montrer qu'il existe une suite strictement croissante d'entiers (n_k) tels que la série de terme général $(X_{n_k})_{k\geq 1}$ converge presque sûrement.

1. Montrer que pour tout $t > 0$, $\mathbb{P}(X_n > t)$ tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini.
2. On pose $Y_n = \min(1, X_n)$. Montrer que pour tout $n \geq 1$,

$$\mathbb{E}(Y_n) = \int_{[0,1]} \mathbb{P}(X_n > t)\, d\lambda(t).$$

3. Montrer que Y_n converge dans $L^1(\mathbb{P})$ vers 0.

4. On pose $n_0 = 0$, puis
$$n_{k+1} = \inf\{i > n_k; \mathbb{E}(Y_i) \leq 3^{-(k+1)}\}.$$
Montrer que la suite (n_k) est bien définie et que pour tout $k \geq 0$, $\mathbb{E}(Y_{n_k}) \leq 3^{-k}$.
5. Montrer qu'il existe $A > 0$ et $q < 1$ tels que pour tout $k \geq 1$,
$$\mathbb{P}(Y_{n_k} \geq 2^{-k}) \leq Aq^k.$$
6. Montrer que $\mathbb{P}(Y_{n_k} \geq 2^{-k} \text{ i.s.}) = 0$.
7. Conclure.

FIN

Rapport sur l'épreuve finale

Le barème de l'épreuve était sur 21.

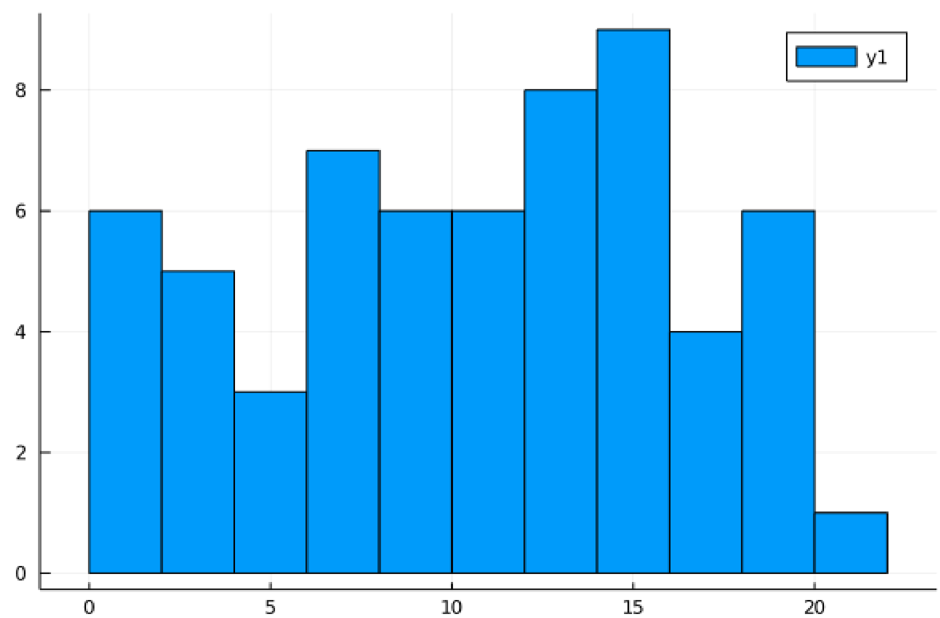
Sur les 62 personnes ayant composé, 35 obtiennent la moyenne à l'unité et 35 personnes obtiennent la moyenne à cette dernière épreuve. Ce sont à peu près les mêmes personnes : seule une personne obtient la moyenne à l'unité sans avoir la moyenne à la dernière épreuve, et inversement.

Les notes s'étendent de 0 à 21. Le premier quartile est à 16, la médiane à $10,30$, le troisième quartile à 5.5. La répartition des notes est donc assez homogène, avec une moyenne de $10,4$.

Mentionnons qu'une candidate obtient la note maximale de 21 (ramenée à 20).

Vous trouverez ci-dessous un corrigé de l'épreuve avec un barême détaillé et le taux de réussite aux différentes questions. Il doit vous aider à trouver où vous avez pu perdre des points, soit que vous n'ayez absolument pas su traiter les questions, soit que vos justifications aient été insuffisantes.

On remarquera que les premières questions sont généreusement récompensées par le barême, à condition que les arguments décisifs soient bien produits.



Solution 1 1. Soit $t \geq 0$. On a

$$\begin{aligned} L_X(t) = \mathbb{E}(e^{-tX}) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-tx}\ d\mathbb{P}_X(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{-tx}\ \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x) a e^{-ax} d\lambda(x) \\ &= a \int_0^{+\infty} e^{-(a+t)x}\ dx = \frac{a}{a+t} \end{aligned}$$

Réussite décevante sur cette question : seulement 49% ; certains n'ont que de vagues souvenirs de la définition de la transformée de Laplace. 2 points

2. (a) X prend des valeurs positives. On a donc $Q_X(t) = \mathbb{P}(X > t) = 1$ pour $t \leq 0$. Pour $t \geq 0$, on a

$$\begin{aligned} Q_X(t) &= \mathbb{P}(X > t) = \mathbb{P}_X(]t, +\infty[) \\ &= \int_{]t,+\infty[} d\mathbb{P}_X(x) \\ &= \int_{]t,+\infty[} ae^{-ax} \, d\lambda(x) = e^{-at} \end{aligned}$$

De même $Q_Y(t) = 1$ pour $t \leq 0$ et $Q_Y(t) = e^{-bt}$ pour $t \geq 0$. 1 point
Pour tout t réel, on a

$$\begin{aligned} Q_{\min(X,Y)}(t) &= \mathbb{P}(\min(X, Y) > t) = \mathbb{P}(X > t, Y > t) \\ &= \mathbb{P}(X > t)\mathbb{P}(Y > t) \end{aligned}$$

par indépendance. Finalement $Q_{\min(X,Y)}(t)$ vaut 1 si $t < 0$ et $e^{-at}e^{-bt} = e^{-(a+b)t}$ si $t \geq 0$. 1 point

Ces deux calculs sont bien faits, avec un taux de réussite supérieur à 75%.

On reconnaît la fonction de queue de $\mathcal{E}(a+b)$. Comme la fonction de queue (ou de manière équivalente, la fonction de répartition) caractérise la loi, $X + Y \sim \mathcal{E}(a + b)$. 2 points

Le résultat final est trouvé dans 63% des copies, mais la justification n'est convaincante que dans 36%.

(b) On a

$$\mathbb{P}(X < Y) = \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{X<Y\}}] = \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{1}_{\{x<y\}}(x, y) \, d\mathbb{P}_{(X,Y)}(x, y)$$

Or X et Y sont indépendantes, donc $\mathbb{P}_{(X,Y)} = \mathbb{P}_X \otimes \mathbb{P}_Y$, et avec le théorème de Tonelli,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X < Y) &= \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{1}_{\{x<y\}}(x, y) \, d(\mathbb{P}_X \otimes \mathbb{P}_Y)(x, y) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{\{x<y\}}(x, y) \, d\mathbb{P}_Y(y) \right) \, d\mathbb{P}_X(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \mathbb{P}(Y > x) \, d\mathbb{P}_X(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}} Q_Y(x) \, d\mathbb{P}_X(x) \end{aligned}$$

X est presque sûrement positive, donc, avec l'expression de la fonction de queue de $\mathcal{E}(b)$, $Q_Y(x) = e^{-bx}$ pour $\mathbb{P}_X$-presque tout x. Ainsi

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X < Y) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-bx} \, d\mathbb{P}_X(x) = \mathbb{E}(e^{-bX}) \\ &= L_X(b) = \frac{a}{a + b}. \end{aligned}$$

Un taux de réussite de 63%, ce qui est très positif pour une question qui n'est pas si facile. 3 points

(c) D'après le lemme des coalitions, les tribus $\sigma(X_1, X_2)$ et $\sigma(X_3)$ sont indépendantes ; or $\min(X_1, X_2)$ est $\sigma(X_1, X_2)$-mesurable, donc $\min(X_1, X_2)$ est indépendante de X_3. D'après la question 2.a, $\min(X_1, X_2) \sim \mathcal{E}(3)$. On peut donc appliquer 2.b, ce qui donne
$$\mathbb{P}(\min(X_1, X_2) < X_3) = \frac{3}{3+3} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

50% des copies ont un résultat correct ou cohérent avec les calculs qu'ils avaient effectués. En revanche moins de 13% songent à vérifier l'indépendance. 2 points

Solution 2 1. La convergence presque sûre entraîne la convergence en probabilité, donc X_n converge en probabilité vers 0, donc pour tout $t > 0$, $\mathbb{P}(|X_n| > t) = \mathbb{P}(X_n > t)$ tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini. 1 point

Un peu moins de 50% de réussite pour cette question, qui était une application directe du cours. Une copie a redémontré le résultat « à la main », ce qui n'est pas si facile.

2. $X_n \geq 0$ et $1 \geq 0$, donc $Y_n = \min(1, X_n) \geq 0$. On peut donc utiliser la formule qui exprime l'espérance d'une variable positive à l'aide de sa fonction de queue :
$$\mathbb{E}(Y_n) = \int_{[0,+\infty[} \mathbb{P}(Y_n > t)\ d\lambda(t).$$
Or pour tout $t \geq 0$,
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y_n > t) &= \mathbb{P}(\min(1, X_n) > t) = \mathbb{P}(1 > t, X_n > t) = \mathbb{1}_{]-\infty,1[}(t)\mathbb{P}(X_n > t) \\ &= \mathbb{1}_{[0,1[}(t)\mathbb{P}(X_n > t),\end{aligned}$$
donc
$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y_n) &= \int_{[0,+\infty[} \mathbb{1}_{[0,1[}(t)\mathbb{P}(X_n > t)\ d\lambda(t) \\ &= \int_{[0,1[} \mathbb{P}(X_n > t)\ d\lambda(t) \\ &= \int_{[0,1]} \mathbb{P}(X_n > t)\ d\lambda(t).\end{aligned}$$

Une question ni très facile, ni très difficile. Taux de réussite : 30% 2 points

3. On a
$$\begin{aligned}\|Y_n\|_{L^1(\mathbb{P})} &= \mathbb{E}(|Y_n|) = \mathbb{E}(Y_n) \\ &= \int_{[0,1]} \mathbb{P}(X_n > t)\ d\lambda(t).\end{aligned}$$
On a
— Pour tout $t \in [0, 1]$, $\mathbb{P}(X_n > t)$ converge vers 0 quand $n \to +\infty$;
— Pour tout $t \in [0, 1]$ et $n \geq 1$, $|\mathbb{P}(X_n > t)| \leq 1$;
— $\int_{[0,1]} 1\ d\lambda = 1 < +\infty$.

Ainsi, avec le théorème de convergence dominée, Y_n converge dans $L^1(\mathbb{P})$ vers 0. 1 point

Seules 25% des copies ont traité cette question avec succès.

4. La suite est construite par récurrence. Si la suite a été définie jusqu'au rang k, l'ensemble

$$\{i > n_k ; \mathbb{E}(Y_i) \leq 3^{-(k+1)}\}$$

est non-vide car $\lim \mathbb{E}(Y_n) = 0$. Donc n_{k+1} est bien définie. Par récurrence, la suite est définie à tous les instants. La borne inférieure d'une partie non-vide de $\mathbb{N}$ est en réalité un élément de cet ensemble, donc,

$$n_{k+1} \in \{i > n_k ; \mathbb{E}(Y_i) \leq 3^{-(k+1)}\},$$

soit $\mathbb{E}(Y_{n_{k+1}}) \leq 3^{-(k+1)}$. Comme $\mathbb{E}(Y_{n_0}) \leq 1 = 3^{-0}$, on a bien pour tout entier naturel k, $\mathbb{E}(Y_{n_k}) \leq 3^{-k}$. 1 point

Le point délicat (est qui permettait d'obtenir le point attribué à cette question) était de penser à justifier que l'ensemble des entiers vérifiant la propriété était non vide. L'inégalité $\mathbb{E}(Y_{n_k}) \leq 3^{-k}$ ne rapportait aucun point, elle avait pour but d'aider à la question suivante.

Cette question a été réussie par 27% des copies.

5. Avec l'inégalité de Markov, on a tout $k \geq 1$,

$$\mathbb{P}(Y_{n_k} \geq 2^{-k}) \leq \frac{\mathbb{E}(Y_{n_k})}{2^{-k}} = 2^k \mathbb{E}(Y_{n_k}) \leq 2^k 3^{-k} = (2/3)^k,$$

ce qui donne le résultat voulu avec $A = 1$ et $q = 2/3$. 1 point

Taux de réussite décevant pour cette application directe du cours : 20 %. Une lacune à combler d'urgence.

6. On a

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(Y_{n_k} \geq 2^{-k}) \leq \sum_{k=1}^{+\infty} A q^k = \frac{Aq}{1-q} < +\infty,$$

donc avec le premier lemme de Borel–Cantelli, $\mathbb{P}(Y_{n_k} \geq 2^{-k} \text{ i.s.}) = 0$. 1 point

Question classique, très bon taux de réussite : 64%

7. Le complémentaire de $\{Y_{n_k} \geq 2^{-k} \text{ i.s.}\}$ est

$$\tilde{\Omega} = \bigcup_{n \geq 1} \bigcap_{k \geq n} \{Y_{n_k} < 2^{-k}\}.$$

Soit $\omega \in \tilde{\Omega} \cap \{X_n \to 0\}$. Comme $\omega \in \tilde{\Omega}$, il existe n tel que $\omega \in \bigcap_{k \geq n} \{Y_{n_k} < 2^{-k}\}$. Comme $\omega \in \{X_n \to 0\}$, il existe ℓ tel que $X_k(\omega) < 1$ pour $k \geq \ell$. Pour $k \geq \max(n, \ell)$, comme $n_k \geq k \geq \ell$, on a $X_{n_k}(\omega) = \min(1, X_{n_k}(\omega)) = Y_{n_k}(\omega)$. Comme $k \geq n$, $Y_{n_k}(\omega) < 2^{-k}$, donc $X_{n_k}(\omega) < 2^{-k}$ pour $k \geq \max(n, \ell)$ et la série (à termes positifs) des $X_k(\omega)$ converge. $\tilde{\Omega} \cap \{X_n \to 0\}$ est l'intersection de deux ensembles de probabilité un, il est donc de probabilité un ; par inclusion la série des X_{n_k} converge $\mathbb{P}$-presque sûrement. 3 points

Il faut bien terminer par une question plus difficile ! Taux de réussite : 8%