SUJET D'EXAMEN PARTIEL

DIPLOME : Licence de Mathématiques	Durée du sujet : 1H 30
UE : Probabilités et Statistiques	Nom du rédacteur : O. GARET
Semestre : 6	
Epreuve de :	■ 2 pages autorisées
Session ......1........	☐ Documents non autorisés
Date : 16 mars 2021	☐ Calculatrices autorisées
Horaire : 16H30–18H00	■ Calculatrice non autorisée

Barème approximatif : exercice 1, 10 points – exercice 2, 15 points.

Rappels et notations.

Toutes les variables sont définies sur un même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

On appelle fonction de queue d'une variable aléatoire réelle X la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$Q_X(t) = \mathbb{P}(X > t).$$

Exercice 1

1. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur $[0, 1]$. On pose $U = \frac{1}{X}$ et $V = \frac{1}{Y}$.
   (a) Calculer la fonction de queue de U.
   (b) La loi de U est-elle à densité ?
   (c) On pose $U_n = \min(U, n)$. La loi de U_n est-elle à densité ?
   (d) Pour quelles valeurs de $p > 0$ la variable U^p est-elle intégrable ?
   (e) Montrer que $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}(U_n) = +\infty$.
   (f) On pose $W = \min(U, V)$. Calculer la fonction de queue de W.
   (g) Montrer que $W \in \mathcal{L}_1$.
2. Soient $(U_n)_{n\geq 1}$,$(V_n)_{n\geq 1}$ des variables indépendantes, positives. On suppose que $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}(U_n) = +\infty$ et $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}(V_n) = +\infty$. A-t-on toujours $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}\min(U_n, V_n) = +\infty$? Si oui, donner une preuve, sinon exhiber un contre-exemple.

Exercice 2 Soient $(X_n)_{n\geq 1}$, $(Y_n)_{n\geq 1}$ des variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur $[0,1]$. Pour $n \geq 1$, on pose $Z_n = \sqrt{X_n^2 + Y_n^2}$. On pose $N = \inf\{n \geq 1; Z_n \leq 1\}$.

1. Montrer qu'il existe une constante C telle que pour tout $n \geq 1$ et tout $t \in [0,1]$, on a $\mathbb{P}(Z_n \leq t) = Ct^2$.
2. Déterminer la loi de N.
3. On pose $Z = Z_N$ (c'est à dire $Z(\omega) = Z_{N(\omega)}(\omega)$). Montrer que pour tout $n \geq 1$ et tout $t \in [0,1]$, on a
$$\mathbb{P}(N = n, Z \leq t) = (1 - C)^{n-1}Ct^2.$$
4. Montrer que pour tout $t \in [0,1]$, $\mathbb{P}(Z \leq t) = t^2$; en déduire soigneusement que Z est une variable aléatoire admettant une densité.
5. Montrer que pour tout $n \geq 1$ et tout $t \in \mathbb{R}$
$$\mathbb{P}(N = n, Z \leq t) = \mathbb{P}(N = n)\mathbb{P}(Z \leq t).$$
6. Calculer $\mathbb{E}\left(\frac{N}{Z}\right)$.
7. Trouver une application mesurable ϕ très simple telle que $\phi(X_1, Y_1)$ ait la même loi que Z.

FIN

1 Solutions

Solution 1 1. (a) X prend presque sûrement ses valeurs dans $]0,1]$, donc $U = 1/X$ prend presque sûrement ses valeurs dans $[1,+\infty[$. On a donc $Q_U(t) = \mathbb{P}(U > t) = 1$ pour $t < 1$. Prenons maintenant $t \geq 1$. On a

$$\mathbb{P}(U > t) = \mathbb{P}(X < 1/t) = \frac{1}{t},$$

car $X \sim \mathcal{U}([0,1])$ et $1/t \in [0,1]$. 2 points

(b) La fonction de queue de U est continue, C^1 par morceaux, et donc $F_X = 1 - Q_X$ aussi. Cela suffit à assurer que la loi de X admet une densité. 2 points

(c) On a $\mathbb{P}(U_n = n) = \mathbb{P}(U \geq n) = \mathbb{P}(X \leq \frac{1}{n}) = \frac{1}{n} > 0$. Ceci entraîne que la loi de U_n n'est pas à densité, car les lois à densité n'ont pas d'atomes (elles ne chargent aucun point).,5 1,5 point

(d) On a $U^p = \frac{1}{X^p}$. Avec le théorème de transfert, on a

$$\mathbb{E}(U^p) = \mathbb{E}\left(\frac{1}{X^p}\right) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{x^p}\, d\mathbb{P}_X(x) = \int_{]0,1]} \frac{1}{x^p}\, d\lambda(x),$$

qui est fini si et seulement si $p < 1$. 1 point

(e) La suite U_n est positive, elle converge presque sûrement vers U en croissant, donc avec le théorème de convergence monotone $\lim \mathbb{E}(U_n) = \mathbb{E}(U) = +\infty$, où la dernière égalité vient de la question précédente.,5 1,5 point

(f) U et V prennent leurs valeurs dans $[1,+\infty[$; il en est de même de leur minimum, soit W. Ainsi $Q_U(t) = 1$ pour $t < 1$. Soit $t \geq 1$.

$$\begin{aligned} Q_W(t) &= \mathbb{P}(\min(U,V) > t) = \mathbb{P}(U > t, V > t) \\ &= \mathbb{P}(U > t)\mathbb{P}(V > t) \text{ par indépendance} \\ &= 1/t.1/t \text{ car } U \text{ et } V \text{ ont même loi} \\ &= \frac{1}{t^2} \end{aligned}$$

,5 1,5 point

(g) L'espérance d'une variable positive se calcule avec la fonction de queue. Ainsi

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(W) &= \int_{[0,+\infty[} Q_W(t)\, d\lambda(t) \\ &= \int_{[0,1[} 1\, d\lambda(t) + \int_{[1,+\infty[} t^{-2}\, d\lambda(t) \\ &= 1 + 1 = 2, \end{aligned}$$

donc $W \in \mathcal{L}_1$.,5 1,5 point

2. On prend U_n comme précédemment, $V_n = \min(n,V)$. On a vu que $\mathbb{E}(U_n)$ tend vers l'infini. Comme V_n a même loi que U_n (la loi image de $\mathcal{U}(0,1)$ par $x \mapsto \min(n,1/x)$), on a aussi $\lim \mathbb{E}(V_n) = +\infty$. Mais

$W_n = \min(U_n, V_n) = \min(\min(X, n), \min(Y, n)) = \min(X, Y, n) = \min(W, n)$ tend en croissant vers W, donc avec le théorème de convergence monotone $\lim \mathbb{E}(W_n) = \mathbb{E}(W) = 2$, ce qui fournit un contre-exemple. 3 points

Solution 2

1. Soit t réel. Par définition de Z_n, on a $\{Z_n \leq t\} = \{(X_n, Y_n) \in B_t\}$, avec

$$B_t = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; \sqrt{x^2 + y^2} \leq t\}.$$

Quand $t < 0$, $B_t = \varnothing$, sinon B_t est la boule euclidienne de centre $(0, 0)$ et de rayon t. On a pour tout t

$$\mathbb{P}(Z_n \leq t) = \mathbb{P}((X_n, Y_n) \in B_t) = \mathbb{P}_{(X_n,Y_n)}(B_t).$$

Comme X_n et Y_n sont indépendants, on a

$$\mathbb{P}_{(X_n,Y_n)} = \mathbb{P}_{X_n} \otimes \mathbb{P}_{Y_n} = \mathcal{U}([0, 1]) \otimes \mathcal{U}([0, 1]) = \mathcal{U}([0, 1]^2),$$

donc

$$\mathbb{P}(Z_n \leq t) = \frac{\lambda^{\otimes 2}(B_t \cap [0, 1])}{\lambda^{\otimes 2}([0, 1])} = \lambda^{\otimes 2}(B_t \cap [0, 1]).$$

Pour $t < 0$, la probabilité est évidemment nulle.
Pour $t \in [0, 1]$, B_t est le quart d'un cercle de centre $(0, 0)$ et de rayon t, donc $\mathbb{P}(Z_n \leq t) = \frac{\pi}{4}t^2$, ce qui donne le résultat voulu avec $C = \frac{\pi}{4}$. 3 points

2. Comme les (X_n) et (Y_n) sont indépendants, le théorème d'associativité de l'indépendance (ou lemme des coalitions) donne l'indépendance des tribus $\mathcal{G}_n = \sigma(X_n, Y_n)$ entre elles. Comme Z_n est mesurable par rapport à $\mathcal{G}_n$, les variables Z_n sont indépendantes et il en est de même des événements $\{Z_n \leq 1\}$, qui ont toutes la probabilité $\frac{\pi}{4}$. Par définition de la loi géométrique, N suit donc une loi géométrique de paramètre $\pi/4$. 2 points

3. Par définition de N, on a

$$\{N = n\} = \bigcap_{k=1}^{n-1} \{Z_k > 1\} \cap \{Z_n \leq 1\},$$

donc comme $Z = Z_n$ sur l'événement $\{N = n\}$, on a

$$\{N = n, Z \leq t\} = \bigcap_{k=1}^{n-1} \{Z_k > 1\} \cap \{Z_n \leq \min(1, t)\},$$

et l'indépendance nous donne alors, pour $t \geq 0$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(N = n, Z \leq t) &= \prod_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}(Z_k > 1) \cdot \mathbb{P}(Z_n \leq \min(1, t)) \\ &= \left(1 - \frac{\pi}{4}\right)^{n-1} \frac{\pi}{4} \min(1, t)^2\end{aligned}$$

3 points

4. Les événements $\{N=n\}$ où n décrit $\mathbb{N}^*$ forment clairement une partition de l'espace. Le principe de partition nous donne alors pour tout $t \geq 0$:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Z \leq t) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(Z \leq t, N=n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(1-\frac{\pi}{4}\right)^{n-1} \frac{\pi}{4} \min(1,t)^2 \\ &= \min(1,t)^2.\end{aligned}$$

,5 On a ainsi 1,5 point

$$\mathbb{P}(Z \leq t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t<0 \\ t^2 & \text{si } t \in [0,1] \\ 1 & \text{si } t>1. \end{cases}$$

La fonction de répartition de Z est manifestement continue, C^1 par morceaux, sa loi admet donc une densité qui est donnée par la dérivée de F_Z sur les différents morceaux, soit $f_Z(t) = 2t\mathbb{1}_{[0,1]}(t)$.,5 1,5 point

5. Soit $n \geq 1$. Pour $t<0$, l'identité

$$\mathbb{P}(N=n, Z \leq t) = \mathbb{P}(N=n)\mathbb{P}(Z \leq t).$$

est évidente car les deux termes de l'équation sont nuls. Pour $t \geq 0$, c'est une conséquence immédiate des deux questions présentes et du fait que $\mathbb{P}(N=n) = \left(1-\frac{\pi}{4}\right)^{n-1}\frac{\pi}{4}$, car $N \sim \mathcal{G}(\pi/4)$. 1 point

6. On peut déduire de la question précédente que N et Z sont indépendantes (les détails ont été donnés dans l'exercice 3 de la fiche 2 du chapitre 1). Comme N et $\frac{1}{Z}$ sont positives et indépendantes, on peut écrire

$$\mathbb{E}\left(\frac{N}{Z}\right) = \mathbb{E}(N)\,\mathbb{E}\left(\frac{1}{Z}\right).$$

Comme $N \sim \mathcal{G}(\pi/4)$, on a $\mathbb{E}(N) = 4/\pi$. Le théorème de transfert donne

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\frac{1}{Z}) &= \int_{\mathbb{R}_+} \frac{1}{z}\, d\mathbb{P}_Z(z) \\ &= \int_{\mathbb{R}_+} 2z\mathbb{1}_{[0,1]}(z)\frac{1}{z}\, d\lambda(z) = 2,\end{aligned}$$

d'où finalement $\mathbb{E}\left(\frac{N}{Z}\right) = \frac{8}{\pi}$. Si on n'a pas reconnu l'indépendance de N et Z, on peut quand même écrire, avec le théorème de Tonelli (ou le théorème de convergence monotone)

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\frac{N}{Z}\right) &= \mathbb{E}\left(\frac{N}{Z}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\mathbb{1}_{\{N=n\}}\right)\right) = \sum_{n=1}^{+\infty}\mathbb{E}\left(\frac{N}{Z}\mathbb{1}_{\{N=n\}}\right) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty}\mathbb{E}\left(\frac{n}{Z}\mathbb{1}_{\{N=n\}}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\mathbb{E}\left(\frac{1}{Z}\mathbb{1}_{\{N=n\}}\right)\end{aligned}$$

Cependant

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\frac{1}{Z}\mathbb{1}_{\{N=n\}}\right) &= \int_0^{+\infty} \mathbb{P}\left(\frac{1}{Z}\mathbb{1}_{\{N=n\}} > t\right)\, dt \\ &= \int_0^{+\infty} \mathbb{P}\left(N=n, \frac{1}{Z} > t\right)\, dt,\end{aligned}$$

et par ailleurs

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(N=n, \frac{1}{Z}>t\right) &= \mathbb{P}\left(N=n, Z<\frac{1}{t}\right) = \mathbb{P}\left(N=n, Z\leq\frac{1}{t}\right)\\ &= \mathbb{P}(N=n)\mathbb{P}\left(Z\leq\frac{1}{t}\right) = \mathbb{P}(N=n)\mathbb{P}\left(\frac{1}{Z}\geq t\right)\end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\frac{1}{Z}\mathbb{1}_{\{N=n\}}\right) &= \int_0^{+\infty}\mathbb{P}(N=n)\mathbb{P}\left(\frac{1}{Z}\geq t\right)\,dt\\ &= \mathbb{P}(N=n)\mathbb{E}\left(\frac{1}{Z}\right),\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\frac{N}{Z}\right) &= \sum_{n=1}^{+\infty} n\mathbb{P}(N=n)\mathbb{E}\left(\frac{1}{Z}\right)\\ &= \mathbb{E}(N)\mathbb{E}\left(\frac{1}{Z}\right).\end{aligned}$$

3 points

7. On prend $\phi(x,y)=\max(x,y)$. On a par indépendance et comme X_1 et Y_1 ont même loi

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\phi(X_1,Y_1)\leq t) &= \mathbb{P}(X_1\leq t)\mathbb{P}(Y_1\leq t)\\ &= \mathbb{P}(X_1\leq t)^2\\ &= \begin{cases}0 & \text{si } t<0\\ t^2 & \text{si } t\in[0,1[\\ 1 & \text{si } t\geq 1.\end{cases}\end{aligned}$$

On reconnaît la fonction de répartition de Z ; $\phi(X_1,Y_1)$ et Z ont donc même loi puisque la fonction de répartition caractérise la loi.,5 2,5 points