SUJET D'EXAMEN FINAL

DIPLOME : Master MFA	Durée du sujet : 1H 30
UE : Probabilités et Processus Stochastiques	Nom du rédacteur : O. GARET
Semestre : 8	
Epreuve de :	■ 6 pages autorisées
Session ......1........	☐ Documents non autorisés
Date : 6 juin 2018	☐ Calculatrices autorisées
Horaire : 9H00–12H00	■ Calculatrice non autorisée

****

ON SERA TRÈS VIGILANT À LA QUALITÉ DE LA RÉDACTION.

****

Exercice 1. Dans tout le problème, on fixe un réel p de $]0,1[$ et on note $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées avec

$$\forall n \geq 1 \quad \mathbb{P}(X_n = 1) = p = 1 - \mathbb{P}(X_n = -1).$$

On pose $S_0 = 0$ ainsi que, pour tout $n \geq 1$,

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i.$$

Pour tout entier relatif c, on pose $T_c = \inf\{n \geq 0; S_n = c\}$. Enfin, on pose $\mathcal{F}_0 = \{\varnothing, \Omega\}$, puis pour $n \geq 1$: $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \dots, X_n)$.

1. Montrer que $(S_n)_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov.
2. Pour quelle valeur de p la suite $(S_n)_{n\geq 0}$ est-elle une martingaleadaptée à la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$?

3. Soient a et b des entiers naturels non nuls, qui seront fixés jusqu'à la fin de l'exercice. Montrer que $T_{-a} \wedge T_b$ est un temps d'arrêt. Justifier que $T_{-a} \wedge T_b$ est presque sûrement fini.

   On pourra admettre sans démonstration que

$$T_{-a} \wedge T_b = \inf\{n \geq 0; S_n \notin]-a, b[\}.$$

4. Montrer que si $p \neq \frac{1}{2}$, on peut trouver un réel x avec $x \neq 1$ tel que la suite $(x^{S_n})_{n\geq 0}$ soit une martingale.
5. Dans cette question, on suppose que $p \neq \frac{1}{2}$ et on note F la fonction définie par $F(n) = \left(\frac{1-p}{p}\right)^n$. Montrer que la suite $(F(S_{n\wedge T_{-a}\wedge T_b}))_{n\geq 0}$ converge presque sûrement vers $F(-a)1\!\!1_{\{T_{-a}<T_b\}} + F(b)1\!\!1_{\{T_{-a}>T_b\}}$. En déduire que $\mathbb{P}(T_{-a} < T_b) = \frac{F(0)-F(b)}{F(-a)-F(b)}$.
6. On suppose désormais jusqu'à la fin de l'exercice que $p = \frac{1}{2}$. Montrer qu'alors $\mathbb{P}(T_{-a} < T_b) = \frac{b}{a+b}$.
7. Montrer que la suite $(Y_n)_{n\geq 0}$ définie par $Y_n = S_n^2 - n$ est une martingale.
8. Montrer que la suite $(Z_n)_{n\geq 0}$ définie par $Z_n = Y_{n\wedge T_{-a}\wedge T_b}$ converge presque sûrement vers une variable Z intégrable, puis identifier Z.
9. Montrer enfin que $\mathbb{E}(T_{-a} \wedge T_b) = ab$.

Indications

1

1. Utiliser une méthode standard.
2. Revenir à la définition d'une martingale.
3. On peut penser à utiliser un résultat générique sur les chaînes de Markov.
4. Revenir à la définition d'une martingale.
5. On peut utiliser un théorème d'arrêt
6. On pourra démontrer que la suite $(S_{n\wedge T_{-a}\wedge T_b})$ est une martingale.
7. Noter que $S_{n+1}^2 = (S_n + X_{n+1})^2$.
8. On pourra remarquer que $Z_n^+ \leq \max(a^2, b^2)$.
9. On pourra remarquer que $|Z_n| \leq 2\max(a^2, b^2) + |Z|$.

FIN

1 Solutions

Solution 1 1. Si on pose $F(x,y) = x + y$, on a la récurrence $S_{n+1} = F(S_n, X_{n+1})$. Comme les variables $(X_n)_{n\geq 1}$ sont i.i.d. et indépendantes de $S_0 = 0$, (S_n) est une chaîne de Markov.

2. Soit n un entier naturel. Pour tout i entre 1 et n, on a l'inclusion $\{X_i \in \{-a;b\}\} \in \mathcal{F}_i \subset \mathcal{F}_n$. L'identité

$$\{T_{-a} \wedge T_b \leq n\} = \cup_{i=1}^n \{X_i \in \{-a;b\}$$

entraîne que $\{T_{-a} \wedge T_b \leq n\} \in \mathcal{F}_n$, et comme n peut être pris quelconque, $T_{-a} \wedge T_b$ est bien un temps d'arrêt. La chaîne est irréductible puisqu'on peut passer de chaque point à son voisin, donc $T_{-a} \wedge T_b$, qui coïncide avec le temps de sortie de l'ensemble fini $]-a,b[\cap\mathbb{Z}$, qui est presque sûrement fini grâce à l'hypothèse irréductibilité.

3. On a $x^{S_{n+1}} = x^{S_n} x^{X_{n+1}}$, donc comme x^{S_n} est $\mathcal{F}_n$-mesurable tandis que X_{n+1} est indépendant de $\mathcal{F}_n$, on a

$$\mathbb{E}(x^{S_{n+1}}) = x^{S_n}\mathbb{E}(x^{X_{n+1}}|\mathcal{F}_n) = x^{S_n}\mathbb{E}(x^{X_{n+1}})$$

Le théorème de transfert donne

$$\mathbb{E}(x^{X_{n+1}}) = px + (1-x)x^{-1},$$

ce qui donne que (x^{S_n}) est une martingale si et seulement x est solution de l'équation $1 = px + (1-p)x^{-1}$, soit $px^2 - x + (1-p) = 0$. $x = 1$ en est une racine évidente, $\frac{1-p}{p}$ est l'autre racine puisque $\frac{1-p}{p}$ est le produit des racines de cette équation du second degré. Elle est bien différente de 1 lorsque $p = \frac{1}{2}$.

4. Dès que n dépasse $T_{-a} \wedge T_b$ qui est presque sûrement fini, $n \wedge T_{-a} \wedge T_b$ coïncide avec $T_{-a} \wedge T_b$, c'est à dire avec T_{-a} sur $\{T_{-a} < T_b\}$ et avec T_b sur $\{T_{-a} > T_b\}$. On a épuisé les cas puisque $T_{-a} \neq T_b$. Cela entraîne que $F(S_{n\wedge T_{-a}\wedge T_b})$ converge vers $F(-a)$ sur $\{T_{-a} < T_b\}$ et vers $F(b)$ sur $\{T_{-a} > T_b\}$. Comme on a épuisé les cas, $x^{S_{n\wedge T_{-a}\wedge T_b}}$ converge presque sûrement vers $F(-a)1\!\!1_{\{T_{-a}<T_b\}} + F(b)1\!\!1_{\{T_{-a}>T_b\}}$.

5. La suite $F(S_{n\wedge T_{-a}\wedge T_b})$ prend ses valeurs dans un ensemble à $a + b + 1$ éléments : elle est donc bornée et le théorème de convergence dominée entraîne la convergence de $\mathbb{E}(F(S_{n\wedge T_{-a}\wedge T_b}))$ vers la limite $\mathbb{E}(F(-a)1\!\!1_{\{T_{-a}<T_b\}} + F(b)1\!\!1_{\{T_{-a}>T_b\}})$. Comme $(x^{S_n})_{n\geq 0}$ est une martingale, le théorème d'arrêt dit que $(x^{S_{n\wedge T_{-a}\wedge T_b}})_{n\geq 0} = (F(S_{n\wedge T_{-a}\wedge T_b}))_{n\geq 0}$

en est encore une, donc son espérance est constante et vaut $F(0)$ (prendre $n = 0$). On a donc l'équation

$$\mathbb{E}\left(F(-a)\mathbb{1}_{\{T_{-a}<T_b\}} + F(b)\mathbb{1}_{\{T_{-a}>T_b\}}\right) = F(0),$$

soit posant $q = \mathbb{P}(T_{-a} < T_b)$:

$$F(0) = qF(-a) + (1-q)F(b),$$

d'où

$$q = \frac{F(0) - F(b)}{F(-a) - F(b)}.$$

6. Si on pose cette fois $F(x) = x$, on a déjà vu que quand $p = 1/2$, la suite $(S_n)_{n\geq 0}$ était une martingale. Le même raisonnement que dans la question précédente s'applique : $(F(S_{n\wedge T_{-a}\wedge T_b}))_{n\geq 0}$ est encore une martingale qui ne prend qu'un nombre fini de valeurs et on peut conclure que

$$\mathbb{P}(T_{-a} < T_b) = \frac{F(0) - F(b)}{F(-a) - F(b)} = \frac{-b}{-a-b} = \frac{b}{a+b}.$$

7. Tout d'abord, remarquons que X_i étant borné par 1, S_n est une variable aléatoire bornée, de même que la variable $Y_n = S_n^2 - n$. Ainsi les variables considérées ont bien intégrables et admettent bien des espérances conditionnelles.

$$S_{n+1}^2 = (S_n + X_{n+1})^2 = S_n^2 + X_{n+1}^2 + 2S_nX_{n+1} = S_n^2 + 1 + 2S_nX_{n+1},$$

car $X_{n+1} \in \{-1, 1\}$. Par suite

$$\forall n \geq 0 \quad Y_{n+1} = Y_n + 2S_nX_{n+1}.$$

S_n est la somme des X_i, pour $1 \leq i \leq n$, donc la variable S_n est $\mathcal{F}_n$-mesurable, et par suite $S_n^2 - n = Y_n$ l'est aussi. Ainsi $\mathbb{E}[Y_n|\mathcal{F}_n] = Y_n$. Comme S_n est $\mathcal{F}_n$-mesurable, on a également $\mathbb{E}[S_nX_{n+1}|\mathcal{F}_n] = S_n\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n]$. Cependant, par construction, X_{n+1} est indépendante de la tribu $\mathcal{F}_n$ (les X_i sont indépendants), donc $\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[X_{n+1}] = 0$. Finalement, par linéarité $\mathbb{E}[Y_{n+1}|\mathcal{F}_n] = Y_n$ et $(Y_n)_{n\geq 0}$ est une martingale adaptée à la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$.

8. On a déjà vu que $T = T_{-a} \wedge T_b$ est un temps d'arrêt adapté à la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$. Mais $(Y_n)_{n\geq 0}$ est une martingale adaptée à la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$. Or, le théorème d'arrêt dit que lorsqu'on arrête une martingale adaptée à une filtration par un temps d'arrêt adapté à la même filtration, le processus obtenu est encore une martingale adaptée à cette filtration. Ainsi $(Z_n)_{n\geq 0}$ est une martingale adaptée à la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$.
   On a $Z_n \leq S^2_{n\wedge T}$, donc $Z_n^+ \leq S^2_{n\wedge T}$. Mais $S_{n\wedge T}$ prend ses valeurs dans $[-a, b]$, donc $Z_n^+ \leq \max(a^2, b^2)$. D'après le théorème de convergence des martingales de Doob, Z_n converge presque sûrement vers une variable Z intégrable. Le même raisonnement que précédemment montre que $S^2_{n\wedge T}$ converge presque sûrement vers $a^2 1\!\!1_{\{T_{-a}<T_b\}} + b^2 1\!\!1_{\{T_{-a}>T_b\}}$. Comme $n \wedge T$ converge vers T, on a finalement
$$Z = a^2 1\!\!1_{\{T_{-a}<T_b\}} + b^2 1\!\!1_{\{T_{-a}>T_b\}} - T.$$

9. On a
$$\begin{aligned}|Z_n| &\leq S^2_{n\wedge T} + n \wedge T \leq \max(a^2, b^2) + T \\ &= \max(a^2, b^2) + a^2 1\!\!1_{\{T_{-a}<T_b\}} + b^2 1\!\!1_{\{T_{-a}>T_b\}} - Z \\ &\leq 2\max(a^2, b^2) + |Z|\end{aligned}$$
   Ainsi, d'après le théorème de convergence dominée $\mathbb{E}(Z) = \lim \mathbb{E}(Z_n)$. Mais comme (Z_n) est une martingale, elle est d'espérance constante : pour tout n, on a $\mathbb{E}Z_n = \mathbb{E}Z_0 = 0$; finalement $\mathbb{E}(Z) = 0$. Par linéarité, on a donc
$$\begin{aligned}\mathbb{E}(T) &= \mathbb{E}(a^2 1\!\!1_{\{T_{-a}<T_b\}} + b^2 1\!\!1_{\{T_{-a}>T_b\}}) \\ &= a^2\mathbb{P}(T_{-a} < T_b) + b^2\mathbb{P}(T_{-a} > T_b) \\ &= a^2\frac{b}{a+b} + b^2\frac{a}{a+b} \\ &= ab.\end{aligned}$$