Master 1

Probabilités et Processus Stochastiques

Examen du 13 juin 2014

durée de la partie 1 : 1h30

Les calculatrices sont interdites. Comme unique document, un recto-verso au format A4 est autorisé

On pose $\Omega = [0,1]^{2n}$, $\mathcal{F} = \mathcal{B}(\Omega)$. Pour $p \in [0,1]$, $\mathrm{Ber}(p)$ désigne la loi de Bernoulli de paramètre p. Pour x et y dans $[0,1]$, on pose
$\mathbb{P}_{x,y} = \mathrm{Ber}(x)^{\otimes n} \otimes \mathrm{Ber}(y)^{\otimes n}$, puis, pour i entre 1 et n :

$$X_i((\omega_1,\dots,\omega_n,\eta_1,\dots,\eta_n)) = \omega_i \text{ et } Y_i((\omega_1,\dots,\omega_n,\eta_1,\dots,\eta_n)) = \eta_i.$$

La famille $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P}_{x,y})_{(x,y)\in[0,1]^2}$ est un modèle statistique. Sous $\mathbb{P}_{x,y}$, les variables $X_1,\dots,X_n$ et $Y_1,\dots,Y_n$ sont indépendantes, suivant respectivement la loi $\mathrm{Ber}(x)$ pour les X_i, $\mathrm{Ber}(y)$ pour les Y_i. Pour X variable aléatoire, on note $\mathbb{E}_{x,y}[X]$ l'espérance de X sous $\mathbb{P}_{x,y}$ (si elle existe !).

On pose $S_n = X_1 + \dots X_n$ et $T_n = Y_1 + \dots Y_n$.

1. Montrer que S_n/n est un estimateur sans biais de x.
2. Montrer que sous $\mathbb{P}_{x,y}$, la suite $(S_n/\sqrt{n})_{n\geq 1}$ est équi-intégrable.
3. Montrer que (S_n, T_n) est une statistique exhaustive du modèle $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P}_{x,y})_{(x,y)\in[0,1]^2}$.
4. Soit f une fonction continue sur $[0,1]^2$. On pose $M_n = f(\frac{S_n}{n}, \frac{T_n}{n})$. À l'aide de la loi forte des grands nombres, montrer simplement que M_n est un estimateur asymptotiquement sans biais de $f(x,y)$, c'est à dire que pour tout $(x,y) \in [0,1]^2$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{E}_{x,y}[M_n] = f(x,y)$.
5. Quelle est la loi du couple (S_n, T_n) sous $\mathbb{P}_{x,y}$?
   Montrer qu'il existe un polynôme $Q_n \in \mathbb{R}[X,Y]$ tel que pour tout $(x,y) \in [0,1]^2$, $\mathbb{E}_{x,y} M_n = Q_n(x,y)$.
6. Soit f une fonction continue sur $[0,1]^2$. Soit pour tout $\varepsilon > 0$, le réel $\delta(\varepsilon)$ défini par
   $$\delta(\varepsilon) = \sup\{|f(u) - f(v)| : (u,v) \in [0,1]^2 \times [0,1]^2 \text{ et } \|u - v\|_\infty \leq \varepsilon\}.$$
   Démontrer que $\delta(\varepsilon)$ tend vers 0 lorsque ε tend vers 0.
7. Soit f une fonction continue sur $[0,1]^2$. Exprimer $Q_n(x,y) - f(x,y)$ sous forme de l'espérance d'une variable aléatoire. En déduire que $\forall (x,y) \in [0,1]^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall \varepsilon > 0$,
   $$|Q_n(x,y) - f(x,y)| \leq \delta(\varepsilon) + 2\|f\|_\infty \mathbb{P}_{x,y}\left(\|(\frac{S_n}{n}, \frac{T_n}{n}) - (x,y)\|_\infty \geq \varepsilon \right).$$

 Tournez la page S.V.P.

8. Montrer que $\mathbb{P}\left(\|(\frac{S_n}{n}, \frac{T_n}{n}) - (x,y)\|_\infty \geq \varepsilon\right) \leq \frac{4}{n\varepsilon^2}$.
9. Montrer que les fonctions polynômes à deux variables forment une partie dense de l'ensemble des fonctions continues sur $[0,1]^2$, muni de la norme infinie.
10. Bonus : Même question si on remplace $[0,1]^2$ par un compact quelconque de $\mathbb{R}^2$.

FIN