UNIVERSITÉ DE LORRAINE

Master 1

Probabilités et Processus Stochastiques

Examen du 10 juin 2015

durée 2h

Les calculatrices sont interdites. Comme unique document, un recto-verso au format A4 est autorisé

ON SERA TRÈS VIGILANT À LA QUALITÉ DE LA RÉDACTION.

Exercice I

Soit n un entier naturel non nul. On considèle le modèle $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), \mathbb{P}_\theta)_{\theta\in\Theta}$, avec $\Theta =]0, +\infty[$, $\mathbb{P}_\lambda = \mathcal{P}(\lambda)^{\otimes n}$.

1. Montrer que $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ est une statistique exhaustive du modèle.
2. Par la méthode de votre choix, montrer que la loi de S_n sous $\mathbb{P}_\theta$ est $\mathcal{P}(n\theta)$.
3. Soit f une fonction bornée. Montrer que
$$F(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(nz)^k}{k!} f(k)$$
définit une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$.
Rappel : Une limite uniforme sur tout compact de fonctions holomorphes est holomorphe.
4. Montrer que pour tout fonction ϕ mesurable bornée,
$$(\forall\theta \in \Theta \quad \mathbb{E}_\theta[\phi(S_n)] = 0) \Longrightarrow (\forall\theta \in \Theta \quad \phi(S_n) = 0 \quad \mathbb{P}_\theta \text{ p.s.}).$$
On dit alors que S_n est une statistique exhaustive complète du modèle.

Exercice II

Soit ϕ une fonction de $\mathbb{R}_+$ dans lui même, avec $\lim_{x\to+\infty} \phi(x) = +\infty$. Soit (X_n) une famille de variables positives vérifiant

— Pour tout $n \geq 1$, $\mathbb{E}(X_n\phi(X_n)) \leq 1$.
— $\mathbb{P}(X_n \to 1) = 1$

Montrer que la suite $\mathbb{E}(X_n)$ converge vers une limite à préciser.

Exercice III

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes telles que l'on ait :

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \mathbb{P}(X_k = 1) = \mathbb{P}(X_k = -1) = \frac{1}{2}.$$

On pose pour $n \geq 1$,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k.$$

Pour $z \in \mathbb{C}$, on pose $g(z) = \mathbb{E}e^{zX_1}$

1. (a) Montrer que pour tout nombre complexe z, on a

   $$g(z) = \cosh z$$

   (b) Calculer la fonction caractéristique de X_1, puis la fonction caractéristique de $-X_1$.

   (c) Montrer que S_n et $-S_n$ ont même loi.

2. Montrer que pour tout réel u, on a

   $$g(u) \leq \exp \frac{u^2}{2}.$$

   (On pourra utiliser un développement en série entière.)

3. Soit n un entier strictement positif et $\alpha > 0$.

   (a) Montrer que

   $$\forall u \in \mathbb{R}_+ \quad \mathbb{P}(S_n \geq n\alpha) \leq \frac{g(u)^n}{e^{n\alpha u}}$$

   (b) En déduire que

   $$\mathbb{P}(S_n \geq n\alpha) \leq \exp(-n\frac{\alpha^2}{2}).$$

   (c) Montrer soigneusement que

   $$\mathbb{P}(|S_n| \geq n\alpha) \leq 2\exp(-n\frac{\alpha^2}{2}).$$

4. (a) Montrer que quels que soient les réels $\gamma > 0$ et $\delta > 0$, la série de terme général $(\exp(-\delta n^\gamma))_{n\geq 0}$ converge.

   (b) Soit $\beta > \frac{1}{2}$. Montrer que

   $$\lim_{n\to+\infty} \frac{S_n}{n^\beta} = 0 \text{ presque sûrement.}$$

FIN