SUJET D'EXAMEN PARTIEL

DIPLOME : Master MFA	Durée du sujet : 1H 30
UE : Probabilités et Processus Stochastiques	Nom du rédacteur : O. GARET
Semestre : 8	
Epreuve de :	■ Documents autorisés
Session ......1........	☐ Documents non autorisés
Date : 23 mars 2018	■ Calculatrices autorisées
Horaire : 10H15–11H45	☐ Calculatrice non autorisées

****

Le sujet est composé de deux parties : une partie QCM, et une partie rédactionnelle, ci-jointe.

ON SERA TRÈS VIGILANT À LA QUALITÉ DE LA RÉDACTION.

****

Exercice 1. *Évolution d'un génotype avec fixation : le modèle de Wright–Fisher.*
Nous travaillons ici sur une population de taille fixe formée de $2N$ gènes. Il y a deux types de gènes possibles : le type "a" et le type "A". Chacun des gènes au temps $n+1$ est engendré par deux des $2N$ gènes présents au temps N. Son type est celui d'un de ses deux parents (choisi au hasard).

On considère la variable aléatoire X_n égale au nombre d'individus de type "A" dans la population à l'étape n.

On admettra qu'on peut modéliser l'évolution par la récurrence suivante :

$$X_{n+1} = \sum_{k=1}^{2N} 1\!\!1_{\{Y_{n+1,k} \le X_n\}},$$

où $(Y_{n,k})_{n\ge 1, k\in\{1,\dots,2N\}}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur l'ensemble fini $\{1,\dots,2N\}$. X_0 est indépendante des $(Y_{n,k})$.

1. Montrer que X_n est une chaîne de Markov à valeurs dans l'ensemble $E = \{0, \ldots, 2N\}$.
2. Montrer que la loi de X_{n+1} sachant $X_n = k$ est une loi binomiale de paramètres $2N$ et $(k/2N)$. Identifier les éventuels points absorbants.
3. Montrer que $(X_n)_{n \geq 0}$ converge presque sûrement vers une variable aléatoire X_∞.
4. Déterminer la loi de X_∞ en fonction de la loi de X_0.

Indications

1

1. La suite $(Y_{n,1}, Y_{n,2}, \ldots, Y_{n,2N})_{n \geq 1}$ est une suite de vecteurs aléatoires indépendants de même loi que l'on peut utiliser pour obtenir une représentation canonique.
2. Se ramener à l'étude d'une somme de variables de Bernoulli.
3. Il y a plusieurs méthodes.

   On peut par exemple calculer $\mathbb{E}(X_{n+1} | \sigma(X_1, \ldots, X_n))$, ou utiliser des techniques générales sur les chaînes de Markov dont l'espace d'état est fini et qui possèdent des points absorbants .
4. On pourra remarquer que la suite $(\mathbb{E}X_n)_{n \geq 1}$ est constante.

FIN

Solution 1 1. Considérons l'application $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2N} \to \mathbb{R}$ telle que

$$F(k, (x_1, \dots, x_{2N})) = \sum_{i=1}^{2N} 1\!\!1_{\{x_i \le k\}}.$$

On a la récurrence $X_{n+1} = F(X_n, \overline{Y}_n)$, avec $\overline{Y}_n = (Y_{n,1}, \dots, Y_{n,2N})$. Comme la suite $(\overline{Y}_n)$ est une suite de vecteurs indépendants, de même loi commune $U(\{1, \dots, 2N\})^{\otimes 2N}$, indépendante de X_0, le théorème fondamental de construction d'une chaîne de Markov à l'aide d'une fonction de mise à jour montre que $(X_n)_{n\ge 0}$ est une chaîne de Markov. Par récurrence, il est clair que la chaîne prend ses valeurs dans $\{0, \dots, 2N\}$.

2. La loi de X_{n+1} sachant $X_n = k$ est la loi de $F(k, \overline{Y}_1)$. Comme c'est la somme de $2N$ variables aléatoires indépendantes suivant chacune la loi de Bernoulli de paramètre $k/2N$, c'est la loi binomiale $B(2N, k/2N)$. La matrice de passage de la chaîne $(p_{k,\ell})$ est donnée par $p_{k,\ell} = B(2N, k/2N)(\{\ell\})$. Les points absorbants k sont à chercher parmi les points tels que la loi conditionnelle $B(2N, k/2N)$ est dégénérée : ce n'est le cas que si $k/2N = 0$ ou $k/2N = 1$. On vérifie alors simplement que 0 et $2N$ sont bien des points absorbants.

3. Comme $\overline{Y}_{n+1}$ est indépendant de $X_0, \dots X_n$, on a, posant $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, \dots, X_n)$:

$$\mathbb{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) = \mathbb{E}(F(X_n, \overline{Y}_{n+1})|\mathcal{F}_n) = G(X_n)$$

avec $G(k) = \mathbb{E}(F(k, \overline{Y}_{n+1}))$. Par linéarité de l'espérance, on a facilement $G(k) = 2N \times \frac{k}{2N} = k$, ce qui nous montre que $(X_n)_{n\ge 0}$ est une martingale. Cette martingale est bornée dans L_∞ (donc en norme dans L^2) par la constante $2N$. Elle converge donc presque sûrement et dans L^2 vers une variable aléatoire X_∞.

4. La suite (X_n) converge dans L^2, donc dans L^1 vers X_∞ : cela entraîne que $\mathbb{E}(X_n)$ converge vers $\mathbb{E}(X_\infty)$. Or (X_n) est une martingale, donc la suite $(\mathbb{E}(X_n))_{n\ge 0}$ est constante, égale à $\mathbb{E}(X_0)$: on a donc $\mathbb{E}(X_\infty) = \mathbb{E}(X_0)$ On sait qu'une chaîne de Markov ne peut converger que vers des points absorbants de sa dynamique : X_∞ est donc à support dans $\{0, 2N\}$. On a donc

$$\mathbb{E}(X_0) = \mathbb{E}(X_\infty) = 0\mathbb{P}(X_\infty = 0) + 2N\mathbb{P}(X_\infty = 2N),$$

soit $\mathbb{P}(X_\infty = 2N) = \frac{\mathbb{E}(X_0)}{2N}$ et enfin

$$\mathbb{P}_{X_\infty} = (1 - \frac{\mathbb{E}(X_0)}{2N})\delta_0 + \frac{\mathbb{E}(X_0)}{2N}\delta_{2N}.$$

Probabilités et processus stochastiques **Partiel du 23/03/2018**

☐0 ☐0 ☐0 ☐0 ☐0 ☐0 ☐0 ☐0
☐1 ☐1 ☐1 ☐1 ☐1 ☐1 ☐1 ☐1
☐2 ☐2 ☐2 ☐2 ☐2 ☐2 ☐2 ☐2
☐3 ☐3 ☐3 ☐3 ☐3 ☐3 ☐3 ☐3
☐4 ☐4 ☐4 ☐4 ☐4 ☐4 ☐4 ☐4
☐5 ☐5 ☐5 ☐5 ☐5 ☐5 ☐5 ☐5
☐6 ☐6 ☐6 ☐6 ☐6 ☐6 ☐6 ☐6
☐7 ☐7 ☐7 ☐7 ☐7 ☐7 ☐7 ☐7
☐8 ☐8 ☐8 ☐8 ☐8 ☐8 ☐8 ☐8
☐9 ☐9 ☐9 ☐9 ☐9 ☐9 ☐9 ☐9

$\longleftarrow$ codez votre numéro d'étudiant ci-contre, et écrivez votre nom et prénom ci-dessous.

Nom et prénom :

....

Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter zéro, une ou plusieurs bonnes réponses. Les autres ont une unique bonne réponse.

Question 1 Si $X_1, \ldots, X_n$ est une suite de variables aléatoires centrées avec $\mathbb{E}(X_1^2) = 1$, alors $\frac{X_1 + \ldots X_n}{\sqrt{n}} \Longrightarrow \mathcal{N}(0,1)$

☐ vrai ☐ faux

Question 2 ♣ On peut trouver des variables X et Y indépendantes telles que

☐ $\mathbb{E}((X-Y)^2|X) = X^2 - 3X + 2$
☐ $\mathbb{E}((X-Y)^2|X) = X^2 - 4X + 5$
☐ *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 3 ♣ Une chaîne de Markov homogène avec un espace d'états fini

☐ converge presque sûrement vers l'unique mesure invariante
☐ admet au moins une mesure invariante
☐ admet au plus une mesure invariante
☐ admet exactement une mesure invariante
☐ *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 4 Soit (X_n) une chaîne de Markov homogène irréductible sur l'ensemble $\{1,2,3,4,5,6\}$ partant du point 5. On suppose que la loi uniforme sur $\{1,2,3,4,5,6\}$ est invariante sous la dynamique de la chaîne. On pose $S_n = \sum_{k=1}^n \mathbb{1}_{\{X_k \le 4\}}$. Alors, avec probabilité 1, S_n dépasse $n/2$ à partir d'un certain rang.

- ☐ vrai
- ☐ faux, mais si on rajoute l'hypothèse que la chaîne est apériodique, c'est vrai
- ☐ faux, même si on rajoute l'hypothèse que la chaîne est apériodique

Question 5 Soit (X_n) une chaîne de Markov homogène irréductible sur l'ensemble $\{1,2,3,4,5,6\}$ partant du point 5. Alors, la suite $\mathbb{P}(X_n = 1)$ converge.

☐ vrai ☐ faux

Question 6 Soit (X_n) une chaîne de Markov homogène irréductible sur un ensemble fini E. Alors la suite (X_n) passe presque sûrement par tous les points de E.

☐ faux ☐ vrai

Question 7 ♣ Soit (M_n) une martingale

- ☐ On peut construire une martingale qui converge avec probabilité nulle
- ☐ On peut construire un martingale qui converge dans L^2, mais pas en probabilité
- ☐ Si $\mathbb{P}(\forall n \ge 0; \exists M \quad |M_n| \le M) = 1$, alors (M_n) converge dans L^2
- ☐ Si il existe M tel que $\mathbb{P}(\forall n \ge 0; |M_n| \le M) = 1$, alors (M_n) converge dans L^2
- ☐ (M_n) converge presque sûrement
- ☐ Si il existe M tel que $\mathbb{P}(\forall n \ge 0; |M_n| \le M) = 1$, alors (M_n) converge presque sûrement
- ☐ On peut construire une martingale qui converge avec probabilité 1/2.
- ☐ *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 8 ♣ Soit $(X_n)_{n\ge 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant la loi $\mathcal{N}(1,1)$. On pose $M_n = X_1 + \cdots + X_n$.

- ☐ (M_n) converge presque sûrement
- ☐ (M_n/n) est bornée dans L^2
- ☐ (M_n) est bornée dans L^1
- ☐ (M_n/n) est une martingale
- ☐ (M_n) est bornée dans L^2
- ☐ (M_n/n) est bornée dans L^1
- ☐ (M_n/n) converge presque sûrement
- ☐ (M_n) est une martingale
- ☐ *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 9 ♣ Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant la loi de Bernoulli de paramètre p. On pose $A_n = \begin{pmatrix} 1+X_n & 1 \\ 1-X_n & 1 \end{pmatrix}$, $M_n = A_1 \times \cdots \times A_n$, puis $Y_n = \det M_n$

- ☐ (Y_n) est une chaîne de Markov pour au moins une valeur de p, mais pas pour toutes
- ☐ (Y_n) est une martingale pour au moins une valeur de p, mais pas pour toutes
- ☐ (Y_n) est une martingale pour toutes les valeurs de p
- ☐ (Y_n) n'est jamais une martingale
- ☐ (Y_n) est une chaîne de Markov pour toutes les valeurs de p
- ☐ *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 10 Soit (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes suivant la loi de Poisson de paramètre 1. On note $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 1}$ la filtration canonique, donnée par $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$. On note $T = \inf\{n \geq 1; X_n > X_{n+1}\}$. Alors, T est un temps d'arrêt adapté à la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 1}$.

☐ faux ☐ vrai

Question 11 ♣ Soit (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes suivant la loi de Poisson de paramètre 1. On note $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 1}$ la filtration canonique, donnée par $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$. On note $T = \inf\{n \geq 3; X_n > X_{n-1} > X_{n-2}\}$. Alors,

☐ T est un temps d'arrêt adapté à la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 1}$ ☐ T est presque sûrement fini

☐ *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 12 Soit (X_n) une chaîne de Galton-Watson de loi de reproduction la loi exponentielle de paramètre un et partant d'un unique individu. Alors, $\mathbb{P}(X_n \to 0) = 1$.

- ☐ vrai
- ☐ faux

Probabilités et processus stochastiques **Partiel du 23/03/2018**

□0	□0	□0	□0	□0	□0	□0	□0
□1	□1	□1	□1	□1	□1	□1	□1
□2	□2	□2	□2	□2	□2	□2	□2
□3	□3	□3	□3	□3	□3	□3	□3
□4	□4	□4	□4	□4	□4	□4	□4
□5	□5	□5	□5	□5	□5	□5	□5
□6	□6	□6	□6	□6	□6	□6	□6
□7	□7	□7	□7	□7	□7	□7	□7
□8	□8	□8	□8	□8	□8	□8	□8
□9	□9	□9	□9	□9	□9	□9	□9

$\longleftarrow$ codez votre numéro d'étudiant ci-contre, et écrivez votre nom et prénom ci-dessous.

Nom et prénom :

....

Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter zéro, une ou plusieurs bonnes réponses. Les autres ont une unique bonne réponse.

Question 1 Si $X_1, \dots, X_n$ est une suite de variables aléatoires centrées avec $\mathbb{E}(X_1^2) = 1$, alors $\frac{X_1+\dots X_n}{\sqrt{n}} \implies \mathcal{N}(0,1)$

- [ ] vrai
- [x] faux

Question 2 ♣ On peut trouver des variables X et Y indépendantes telles que

- [ ] $\mathbb{E}((X-Y)^2|X) = X^2 - 3X + 2$
- [x] $\mathbb{E}((X-Y)^2|X) = X^2 - 4X + 5$
- [ ] *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 3 ♣ Une chaîne de Markov homogène avec un espace d'états fini

- [ ] converge presque sûrement vers l'unique mesure invariante
- [x] admet au moins une mesure invariante
- [ ] admet au plus une mesure invariante
- [ ] admet exactement une mesure invariante
- [ ] *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 4 Soit (X_n) une chaîne de Markov homogène irréductible sur l'ensemble $\{1,2,3,4,5,6\}$ partant du point 5. On suppose que la loi uniforme sur $\{1,2,3,4,5,6\}$ est invariante sous la dynamique de la chaîne. On pose $S_n = \sum_{k=1}^n \mathbb{1}_{\{X_k \leq 4\}}$. Alors, avec probabilité 1, S_n dépasse $n/2$ à partir d'un certain rang.

- [x] vrai
- [ ] faux, mais si on rajoute l'hypothèse que la chaîne est apériodique, c'est vrai
- [ ] faux, même si on rajoute l'hypothèse que la chaîne est apériodique

Question 5 Soit (X_n) une chaîne de Markov homogène irréductible sur l'ensemble $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ partant du point 5. Alors, la suite $\mathbb{P}(X_n = 1)$ converge.

□ vrai ■ faux

Question 6 Soit (X_n) une chaîne de Markov homogène irréductible sur un ensemble fini E. Alors la suite (X_n) passe presque sûrement par tous les points de E.

□ faux ■ vrai

Question 7 ♣ Soit (M_n) une martingale

- ■ On peut construire une martingale qui converge avec probabilité nulle
- □ On peut construire un martingale qui converge dans L^2, mais pas en probabilité
- □ Si $\mathbb{P}(\forall n \geq 0; \exists M \quad |M_n| \leq M) = 1$, alors (M_n) converge dans L^2
- ■ Si il existe M tel que $\mathbb{P}(\forall n \geq 0; |M_n| \leq M) = 1$, alors (M_n) converge dans L^2
- □ (M_n) converge presque sûrement
- ■ Si il existe M tel que $\mathbb{P}(\forall n \geq 0; |M_n| \leq M) = 1$, alors (M_n) converge presque sûrement
- ■ On peut construire une martingale qui converge avec probabilité $1/2$.
- □ *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 8 ♣ Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant la loi $\mathcal{N}(1, 1)$. On pose $M_n = X_1 + \cdots + X_n$.

- □ (M_n) converge presque sûrement
- ■ (M_n/n) est bornée dans L^2
- □ (M_n) est bornée dans L^1
- □ (M_n/n) est une martingale
- □ (M_n) est bornée dans L^2
- ■ (M_n/n) est bornée dans L^1
- ■ (M_n/n) converge presque sûrement
- □ (M_n) est une martingale
- □ *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 9 ♣ Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant la loi de Bernoulli de paramètre p. On pose $A_n = \begin{pmatrix} 1 + X_n & 1 \\ 1 - X_n & 1 \end{pmatrix}$, $M_n = A_1 \times \cdots \times A_n$, puis $Y_n = \det M_n$

- □ (Y_n) est une chaîne de Markov pour au moins une valeur de p, mais pas pour toutes
- ■ (Y_n) est une martingale pour au moins une valeur de p, mais pas pour toutes
- □ (Y_n) est une martingale pour toutes les valeurs de p
- □ (Y_n) n'est jamais une martingale
- ■ (Y_n) est une chaîne de Markov pour toutes les valeurs de p
- □ *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 10 Soit (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes suivant la loi de Poisson de paramètre 1. On note $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 1}$ la filtration canonique, donnée par $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$. On note $T = \inf\{n \geq 1; X_n > X_{n+1}\}$. Alors, T est un temps d'arrêt adapté à la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 1}$.

■ faux ☐ vrai

Question 11 ♣ Soit (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes suivant la loi de Poisson de paramètre 1. On note $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 1}$ la filtration canonique, donnée par $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$. On note $T = \inf\{n \geq 3; X_n > X_{n-1} > X_{n-2}\}$. Alors,

■ T est un temps d'arrêt adapté à la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 1}$ ■ T est presque sûrement fini

☐ *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 12 Soit (X_n) une chaîne de Galton-Watson de loi de reproduction la loi exponentielle de paramètre un et partant d'un unique individu. Alors, $\mathbb{P}(X_n \to 0) = 1$.

■ vrai

☐ faux