Master 1

Probabilités et Processus Stochastiques

Examen du 30 avril 2015

durée 2h45

Les calculatrices sont interdites. Comme unique document, un recto-verso au format A4 est autorisé

Exercice I

1. On note E l'ensemble des fonctions bornées de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. Pour $f \in E$, on note

$$Tf(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}f(2x) & \text{si } x \in [0,1/2[\\ \frac{1}{2}(1+f(2x-1)) & \text{si } x \in [1/2,1] \end{cases}.$$

   Montrer qu'il existe une unique fonction $F \in E$ telle que $Tf = f$. Identifier cette fonction.

2. Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant la loi de Bernoulli de paramètre $1/2$. On pose pour $n \geq 1$: $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{X_k}{2^{k+1}}$, $T_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{X_{n-k}}{2^{k+1}}$ et

$$S = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{X_k}{2^{k+1}}.$$

   Vérifier que S est bien définie.

3. On pose, pour $x \in [0,1]$, $F_n(x) = \mathbb{P}(T_n \leq x)$. Montrer que

$$\forall x \in [0,1] \quad F_{n+1}(x) = TF_n(x).$$

4. Montrer qu'à n fixé T_n et S_n ont même loi.
5. En déduire que S suit la loi uniforme sur $[0,1]$.
6. Montrer que pour tout x réel, on a

$$\frac{\sin x}{x} = \prod_{n=1}^{+\infty} \cos\left(\frac{x}{2^n}\right).$$

   Indication : on pourra noter que

$$S - \frac{1}{2} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{X_k - 1/2}{2^{k+1}}.$$

Exercice II

Soit λ un réel strictement positif. Soit $(A_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur $[0,1]$, $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant la loi exponentielle de paramètre λ. On suppose que les suites (A_n) et (X_n) sont indépendantes l'une de l'autre et on pose

$$Z_n = \frac{\sum_{k=1}^n A_k X_k}{\sum_{k=1}^n A_k}.$$

1. Montrer que (Z_n) converge presque sûrement vers $\frac{1}{\lambda}$.
2. Montrer que $\mathbb{E}[Z_n | A_1, \ldots, A_n] = \frac{1}{\lambda}$.
3. Montrer que

$$\mathbb{E}\left((Z_n - \frac{1}{\lambda})^2 | (A_1, \ldots, A_n)\right) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{A_i}{\sum_{k=1}^n A_k}\right)^2 \text{Var } X_1 \leq \lambda^{-2}.$$

   (On rappelle que Var $X_1 = \lambda^{-2}$.)
4. En déduire que (Z_n) est bornée dans L^2.
5. Montrer que (Z_n) converge dans L^1 vers $\frac{1}{\lambda}$.

FIN