Master 1

Probabilités et Processus Stochastiques

Examen du 15 avril 2014

durée 2h30

1. (a) Q est strictement décroissante, continue, avec $Q(0) = 1$ et admet 0 comme limite en l'infini. Ainsi Q réalise une bijection de $\mathbb{R}^+$ dans $]0, 1]$.

   (b) Pour tout $x \geq 0$, on a

   $$Q(x) = 1 - 2\int_0^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt \geq 1 - 2\int_0^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} 1\,dt = 1 - \frac{2}{\sqrt{2\pi}} x,$$

   donc on peut prendre $C = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}$.

   (c) Posons $V = \varepsilon Q^{-1}(U)$. Pour $x < 0$, on a

   $$\begin{aligned}
   \mathbb{P}(V \leq x) &= \mathbb{P}(\varepsilon = -1, Q^{-1}(U) \geq -x) \\
   &= \mathbb{P}(\varepsilon = -1, U \leq Q(-x)) \\
   &= \mathbb{P}(\varepsilon = -1)\mathbb{P}(U \leq Q(-x)) \\
   &= \frac{1}{2}Q(-x) = \frac{1}{2} - \int_0^{-x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt \\
   &= \int_{-\infty}^0 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt - \int_x^0 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt \\
   &= \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt
   \end{aligned}$$

   De même, pour $x \geq 0$

   $$\begin{aligned}
   \mathbb{P}(V \leq x) &= \mathbb{P}(\varepsilon = -1) + \mathbb{P}(\varepsilon = 1, Q^{-1}(U) \leq x) \\
   &= \frac{1}{2} + \mathbb{P}(\varepsilon = 1, U \geq Q(x)) \\
   &= \frac{1}{2} + \mathbb{P}(\varepsilon = 1)\mathbb{P}(U \geq Q(x)) \\
   &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(1 - Q(x)) = \frac{1}{2} + \int_0^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt \\
   &= \int_{-\infty}^0 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt + \int_0^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt \\
   &= \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt
   \end{aligned}$$

   Ainsi V a la fonction de répartition de la gaussienne centrée réduite, donc V suit la loi $\mathcal{N}(0, 1)$.

(d) …et $V^2 = (\varepsilon Q^{-1}(U))^2 = Q^{-1}(U)^2$ suit la loi du χ^2 à 1 degré de liberté. On a donc montré que la loi image de la loi uniforme sur $[0,1]$ par $x \mapsto (Q^{-1}(x))^2$ est la loi du χ^2 à 1 degré de liberté. On en déduit que $Q^{-1}(U_1)^2, \dots, Q^{-1}(U_k)^2$ sont des variables indépendantes suivant la loi du χ^2 à 1 degré de liberté. Par suite, leur somme suit la loi du χ^2 à d degrés de liberté.

(e) En appliquant (b) à $x = Q^{-1}(U_i)$, il vient $U_i \geq 1 - CQ^{-1}(U_i)$, d'où $C^2 Q^{-1}(U_i)^2 \geq (1-U_i)^2$, et en sommant

$$C^2 S_d \geq \sum_{i=1}^d (1-U_i)^2,$$

puis $C^{-8} S_d^{-4} \leq (\sum_{i=1}^d (1-U_i)^2)^{-4}$, d'où

$$\mathbb{E}[S_d^{-4}] \leq C^8 \mathbb{E}[(\sum_{i=1}^d (1-U_i)^2)^{-4}],$$

Si je pose $\psi(x_1, \dots, x_d) = (\sum_{i=1}^d x_i^2)^{-4}$, j'ai $\mathbb{E}[(\sum_{i=1}^d (1-U_i)^2)^{-4}] = \mathbb{E}\psi(1-U_1, \dots, 1-U_d)$. Les $1-U_i$ sont indépendantes et suivent la loi uniforme sur $[0,1]$: la loi du vecteur $1-U_1, \dots, 1-U_d$ est donc $\mathcal{U}([0,1])^{\otimes d}$, qui est aussi la loi de $(U_1, \dots, U_d)$. On a alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\psi(1-U_1, \dots, 1-U_d) &= \mathbb{E}(\psi(U_1, \dots, U_d)) \\
&= \int_{[0,1]^d} \psi(x)\ d\mathcal{U}([0,1])^{\otimes d}(x) \\
&= \int_{[0,1]^d} \frac{1}{\|x\|_2^8}\ d\lambda(x),
\end{aligned}$$

qui est fini pour $d \geq 9$.

(f) Q^{-1} étant décroissante, on a pour tout i entre 1 et n : $Q^{-1}(U_i)^2 \geq 1\!\!1_{\{U_i \leq 1/2\}} Q^{-1}(1/2)^2$. Ainsi si l'on pose $N_n = \sum_{i=1}^n 1\!\!1_{\{U_i \leq 1/2\}}$, en faisant la somme, on a $S_d \geq Q^{-1}(1/2)^2 N_d$, et

$$\{S_d \leq \theta d\} \subset \{N_d \leq \theta \frac{1}{(Q^{-1}(1/2))^2} d\} = \{N_d \leq d/4\},$$

d'où $\mathbb{P}(S_d \leq \theta d) \leq \mathbb{P}(N_d \leq d/4) \leq e^{-\gamma d}$, puisque N_n suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, 1/2)$.
Bien sûr, si χ_d une autre variable aléatoire suivant la loi du χ^2 à d degrés de liberté, $\mathbb{P}(\chi_d \leq \theta d) = \mathbb{P}(S_d \leq \theta d)$, d'où l'inégalité demandée.

2. (a) On sait bien que la loi gaussienne a des moments de tous ordres.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X_1^4) &= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} x^4 \exp(-\frac{x^2}{2})\ d\lambda(x) \\
&= \lim_{N \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-N}^{N} x^3 x \exp(-\frac{x^2}{2})\ dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{N \to +\infty} [-x^3 \exp(-\frac{x^2}{2})]_{-N}^{N} + \int_{-N}^{N} 3x^2 \exp(-\frac{x^2}{2})\ dx \\
&= 3 \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} x^2 \exp(-\frac{x^2}{2})\ d\lambda(x) \\
&= 3\mathbb{E}[X_1^2] = 3
\end{aligned}$$

La suite $(X_n^2)_{n\geq 1}$ est composée de variables aléatoires indépendantes de même loi admettant un moment d'ordre 1 : ainsi, la loi forte des grands nombres nous donne la convergence presque sûre de $\frac{\sum_{i=1}^n X_i^2}{n}$ vers $\mathbb{E}[X_1^2] = 1$; de même on obtient la convergence presque sûre de $\frac{\sum_{i=1}^n X_i^4}{n}$ vers $\mathbb{E}[X_1^4] = 3$. En faisant le quotient, on obtient la convergence presque sûre de Z_n vers 1/3.

(b) L'inégalité de Cauchy-Schwarz nous donne

$$\left(\sum_{i=1}^n X_i^2\right)^2 \leq n \sum_{i=1}^n X_i^4;$$

en divisant par $(\sum_{i=1}^n X_i^2)(\sum_{i=1}^n X_i^4)$, on obtient l'inégalité $Z_n \leq \frac{n}{\sum_{i=1}^n X_i^2}$, d'où $Z_n^2 \leq \frac{n^2}{(\sum_{i=1}^n X_i^2)^2}$ Maintenant,

$$\frac{n^2}{(\sum_{i=1}^n X_i^2)^2} = 1\!\!1_{\{\sum_{i=1}^n X_i^2 > n\theta\}} \frac{n^2}{(\sum_{i=1}^n X_i^2)^2} + 1\!\!1_{\{\sum_{i=1}^n X_i^2 \leq n\theta\}} \frac{n^2}{(\sum_{i=1}^n X_i^2)^2}.$$

En majorant $1\!\!1_{\{\sum_{i=1}^n X_i^2 > n\theta\}} \frac{n^2}{(\sum_{i=1}^n X_i^2)^2}$ par $\frac{1}{\theta^2}$, on obtient l'inégalité voulue :

$$Z_n^2 \leq \theta^{-2} + \frac{n^2}{(\sum_{i=1}^n X_i^2)^2} 1\!\!1_{\{X_1^2+\dots+X_n^2 \leq n\theta\}}.$$

(c) Prenons $\theta = (Q^{-1}(1/2)/2)^2$. On a pour $n \geq 9$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Z_n^2) &\leq \theta^{-2} + n^2 \mathbb{E}\left(\frac{1}{(\sum_{i=1}^9 X_i^2)^2} 1\!\!1_{\{X_1^2+\dots+X_n^2 \leq n\theta\}}\right) \\
&\leq \theta^{-2} + n^2 \sqrt{\mathbb{E}\frac{1}{(\sum_{i=1}^9 X_i^2)^4}} \sqrt{\mathbb{P}(X_1^2 + \dots + X_n^2 \leq n\theta)}
\end{aligned}$$

$\sum_{i=1}^9 X_i^2$ suit la loi du χ^2 à 9 degrés de libertés et $X_1^2 + \dots + X_n^2$ suit la loi du χ^2 à n degrés de libertés, donc d'après 1.e,
$A = \mathbb{E}\left(\frac{1}{(\sum_{i=1}^9 X_i^2)^4}\right)$ est fini et avec 1.f, on a

$$\mathbb{E}(Z_n^2) \leq \theta^{-2} + \sqrt{A} n^2 e^{-\gamma n/2} \leq \theta^{-2} + \sqrt{A}\frac{2n^2}{\gamma^2 n^2/4} = \theta^{-2} + \sqrt{A}\frac{8}{\gamma^2}.$$

La suite $(Z_n)_{n\geq 9}$ est donc bien bornée dans L^2.

(d) La suite $(Z_n)_{n\geq 9}$ est bornée dans L^2, donc équi-intégrable. Comme elle converge presque sûrement vers 1/3 et est équi-intégrable, elle converge dans L^1 vers 1/3.

FIN