Master 1

Probabilités et Processus Stochastiques

Examen du 15 avril 2014

durée 2h30

Les calculatrices sont interdites. Comme unique document, un recto-verso au format A4 est autorisé

Les résultats du 1) seront utilisés à la question 2)c). Pour le reste, les parties 1) et 2) peuvent être considérées comme indépendantes.

1. On pose $Q(x) = 1 - 2\int_0^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt$.
   (a) Montrer brièvement que Q réalise une bijection de $\mathbb{R}^+$ dans $]0,1]$. On note Q^{-1} la bijection réciproque.
   (b) Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $x \geq 0$, $Q(x) \geq 1 - Cx$.
   (c) Soient U et ε des variables aléatoires indépendantes, où U suit la loi uniforme sur l'intervalle $[0,1]$ et $\mathbb{P}(\varepsilon = 1) = \mathbb{P}(\varepsilon = -1) = 1/2$. Montrer que $\varepsilon Q^{-1}(U)$ suit la loi $\mathcal{N}(0,1)$.
   (d) Soient $(U_1, \dots, U_d)$ des variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur $[0,1]$. Montrer que $S_d = \sum_{k=1}^d Q^{-1}(U_k)^2$ suit la loi du χ^2 à d degrés de liberté.
   (e) On rappelle que pour tout $d \geq 1$ et tout $\alpha < d$, on a

$$\int_{[0,1]^d} \frac{1}{\|x\|_2^\alpha}\, d\lambda^{\otimes d}(x) < +\infty.$$

   En déduire que pour $d \geq 9$,

$$\mathbb{E}(S_d^{-4}) \leq C^8 \mathbb{E}\left(\left(\sum_{i=1}^d (1-U_i)^2\right)^{-4}\right) = C^8 \mathbb{E}\left(\left(\sum_{i=1}^d U_i^2\right)^{-4}\right) < +\infty,$$

   où C est la constante trouvée en 1.(b).
   (f) On rappelle qu'une conséquence de l'inégalité de Höffding est qu'il existe une constante $\gamma > 0$ telle que si N_n suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, 1/2)$, alors $\mathbb{P}(N_n \leq n/4) \leq e^{-\gamma n}$. Montrer alors que si χ_d est une variable suivant la loi du χ^2 à d degrés de liberté, on a

$$\mathbb{P}(\chi_d \leq \theta d) \leq e^{-\gamma d} \text{ avec } \theta = \left(\frac{Q^{-1}(1/2)}{2}\right)^2.$$

2. Soient $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v-a i.i.d suivant la loi $\mathcal{N}(0,1)$. Soit $Z_n = \frac{\sum_{i=1}^n X_i^2}{\sum_{i=1}^n X_i^4}$.

(a) Montrer que Z_n converge presque sûrement vers $1/3$.

(b) Soit $\theta > 0$. Montrer $Z_n \leq \frac{n}{\sum_{i=1}^n X_i^2}$ (on pourra penser à utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz), puis

$$Z_n^2 \leq \theta^{-2} + \frac{n^2}{(\sum_{i=1}^n X_i^2)^2} \mathbb{1}_{\{X_1^2 + \cdots + X_n^2 \leq n\theta\}}.$$

(c) Par un choix habile de θ, montrer que $(Z_n)_{n \geq 9}$ est bornée dans L^2.

(d) Montrer que $(Z_n)_{n \geq 9}$ converge dans L^1 vers $1/3$.

FIN