Université de Nancy I **Master 1**

Nancy-Université
Université Henri Poincaré

Probabilités et Modélisation Stochastique

Examen du 17 novembre 2007

durée 2h

– I –

1. Tout d'abord, remarquons que X_i étant borné par 1, S_n est une variable aléatoire bornée, de même que $Y_n = S_n^2 - n$. Ainsi les variables considérées ont bien intégrables et admettent bien des espérances conditionnelles.
$$S_{n+1}^2 = (S_n + X_{n+1})^2 = S_n^2 + X_{n+1}^2 + 2S_nX_{n+1} = S_n^2 + 1 + 2S_nX_{n+1},$$
car $X_{n+1} \in \{-1, 1\}$. Par suite
$$\forall n \geq 0 \quad Y_{n+1} = Y_n + 2S_nX_{n+1}.$$
S_n est la somme des X_i, pour $1 \leq i \leq n$, donc S_n est $\mathcal{F}_n$-mesurable, et par suite $S_n^2 - n = Y_n$ l'est aussi. Ainsi $\mathbb{E}[Y_n|\mathcal{F}_n] = Y_n$. Comme S_n est $\mathcal{F}_n$-mesurable, on a également $\mathbb{E}[S_nX_{n+1}|\mathcal{F}_n] = S_n\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n]$. Cependant, par construction, X_{n+1} est indépendante de la tribu $\mathcal{F}_n$ (les X_i sont indépendants), donc $\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[X_{n+1}] = 0$. Finalement, par linéarité $\mathbb{E}[Y_{n+1}|\mathcal{F}_n] = Y_n$ et $(Y_n)_{n\geq 0}$ est une martingale adaptée à la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$.
2. T est le temps d'entrée de la suite $(S_n)_{n\geq 0}$ dans le borélien $]-\infty R] \cup [R, +\infty[$. Comme $(S_n)_{n\geq 0}$ est adaptée à la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ (on a vu que pour tout n, S_n est $\mathcal{F}_n$-mesurable), il s'ensuit que T est un temps d'arrêt adapté à la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$. Mais $(Y_n)_{n\geq 0}$ est une martingale adaptée à la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$. Or, le théorème d'arrêt dit que lorsqu'on arrête une martingale adaptée à une filtration par un temps d'arrêt adapté à la même filtration, le processus obtenu est encore une martingale adaptée à cette filtration. Ainsi $(Y_{T\wedge n})_{n\geq 0}$ est une martingale adaptée à la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$.
On va montrer que $|S_{T\wedge n}| \leq R$. On raisonne ici ω par ω, même si la dépendance en ω est laissée implicite pour ne pas surcharger les écritures.
Par définition de T, on sait que $|S_n| < R$ pour $n < T$. Si $T = +\infty$, alors on a pour tout n, $n < T$ et $|S_{T\wedge n}| = |S_n| < R$. Supposons donc T fini. Comme $(|S_n|)$ est à valeurs entières, on a, pour $n < T$, $|S_n| \leq R - 1$. Comme $S_T = S_{T-1} + X_T$, on a alors $|S_T| \leq |S_{T-1}| + |X_T| \leq R - 1 + 1 = R$. Finalement, $|S_n| \leq R$ pour tout $n \leq T$. Cependant, $T \wedge n \leq T$, donc on a bien $|S_{T\wedge n}| \leq R$, d'où
$$Y_{T\wedge n} = S_{T\wedge n}^2 - (T \wedge n) \leq S_{T\wedge n}^2 \leq R^2.$$
3. $(Y_{T\wedge n})$ est une martingale, donc en particulier son espérance est constante : pour tout n, on a
$$\mathbb{E}Y_{T\wedge n} = \mathbb{E}Y_{T\wedge 0} = \mathbb{E}Y_0 = \mathbb{E}0 = 0.$$
Or $Y_{T\wedge n} = S_{T\wedge n}^2 - (T \wedge n)$, donc par linéarité, cela nous donne bien que
$$\forall n \geq 0 \quad \mathbb{E}[S_{T\wedge n}^2] = \mathbb{E}[T \wedge n].$$

 Tournez la page S.V.P.

4. On sait que $Y_{T\wedge n} \leq R^2$, donc $\mathbb{E}Y_{T\wedge n} \leq R^2$, mais $\mathbb{E}[S_{T\wedge n}^2] = \mathbb{E}[T\wedge n]$, donc pour tout $n \geq 0$, on a $\mathbb{E}[T\wedge n] \leq R^2$ est donc la suite $(\mathbb{E}[T\wedge n])_{n\geq 0}$ est bornée.
   T est une variable à valeurs dans $[0, +\infty]$, et $([T\wedge n])_{n\geq 0}$ une suite croissante convergeant (dans $\overline{\mathbb{R}}$) vers T. Par convergence monotone, on a donc $\mathbb{E}[T] = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}[T\wedge n]$, d'où $\mathbb{E}T \leq R^2 < +\infty$. T est donc intégrable, donc presque sûrement finie.
5. Soit ω tel que $T(\omega) < +\infty$. On sait que $|S_{T\wedge n}| \leq R$ pour tout n, donc $|(S_{T(\omega)}(\omega))| \leq R$. Cependant, par définition de T, $|(S_{T(\omega)}(\omega))| \geq R$, finalement $|(S_{T(\omega)}(\omega))| = R$. Pour tout $n \geq T(\omega)$, $(S_{T\wedge n}^2)(\omega) = R^2$, ce qui montre que $(S_{T\wedge n}^2)$ converge presque sûrement vers R^2. Cependant $|S_{T\wedge n}^2| \leq R^2$, donc par convergence dominée, $\mathbb{E}[S_{T\wedge n}^2]$ converge vers R^2. Finalement

$$\mathbb{E}T = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}[T\wedge n] = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}[S_{T\wedge n}^2] = R^2.$$

– II –

1. (a) D'après le théorème de transfert, on a pour tout nombre complexe z :

$$g(z) = \mathbb{P}(X_1 = 1)e^{1.z} + \mathbb{P}(X_1 = -1)e^{-1.z} = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \cosh z.$$

   (b) $\phi_{X_1}(t) = \mathbb{E}e^{itX_1} = g(it) = \cosh it = \cos t$ et $\phi_{X_1}(t) = \mathbb{E}e^{itX_1} = \phi_{X_1}(-t) = \cos -t = \cos t$.
   (c) $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ est une somme de variable aléatoires indépendantes, donc $\phi_{S_n}(t) = \phi_{X_1}(t) \dots \phi_{X_n}(t)$. Comme $X_1, \dots X_n$ ont la même loi, elles ont la même fonction caractéristique, donc $\phi_{S_n}(t) = \phi_{X_1}(t)^n = (\cos t)^n$. De la même manière $-S_n = (-X_1) + \cdots + (-X_n)$ est une somme de n variable aléatoires indépendantes ayant la même loi que $-X_1$ donc $\phi_{-S_n}(t) = \phi_{-X_1}(t)^n = (\cos t)^n$. S_n et $-S_n$ ont la même fonction caractéristique donc elles ont la même loi.
2. On a

$$g(u) = \cosh u = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u^{2n}}{(2n)!}$$

   et

$$\exp(u^2/2) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\left(\frac{u^2}{2}\right)^n}{n!} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u^{2n}}{2^n n!}$$

   Or pour tout $n \geq 1$, on a

$$\frac{u^{2n}}{(2n)!} = \frac{u^{2n}}{2^n n!} \frac{2 \quad . \, 2 \qquad \dots \quad 2}{(n+1).(n+2)\dots(2n)} \leq \frac{u^{2n}}{2^n n!}$$

   En sommant les inégalités, on obtient bien que $g(u) \leq \exp \frac{u^2}{2}$.
3. Soit n un entier strictement positif et $\alpha > 0$.
   (a) Soit $u \geq 0$. $(S_n \geq n\alpha) \Longrightarrow (\exp(uS_n) \geq \exp(n\alpha a))$, Donc

$$\mathbb{P}(S_n \geq n\alpha) \leq \mathbb{P}(\exp(uS_n) \geq \exp(n\alpha a))$$

   $\exp(uS_n)$ est à valeurs positives, donc d'après l'inégalité de Markov

$$\mathbb{P}(\exp(uS_n) \geq \exp(n\alpha a)) \leq \frac{\mathbb{E}\exp(uS_n)}{\exp(n\alpha u)}.$$

   On a $\exp(uS_n) = \prod_{k=1}^n \exp(uX_k)$: Les variables aléatoires $(\exp(uX_k))_{1\leq k\leq n}$ sont indépendantes car les $(X_k)_{1\leq k\leq n}$ sont indépendantes. On a donc

$\exp(uS_n) = \prod_{k=1}^n \mathbb{E}\exp(uX_k)$ Mais ces variables aléatoires ont toutes la même loi – la loi image de $\frac{1}{2}(\delta_1 + \delta_{-1})$ par l'application $x \mapsto \exp(ux)$: on a donc $\exp(uS_n) = \mathbb{E}\exp(uX_1)^n = g(u)^n$. On a bien finalement

$$\forall u \in \mathbb{R}_+ \quad \mathbb{P}(S_n \geq n\alpha) \leq \frac{g(u)^n}{e^{n\alpha u}}$$

(b) En utilisant la majoration que l'on a pour g, on obtient

$$\forall u \in \mathbb{R}_+ \quad \mathbb{P}(S_n \geq n\alpha) \leq \frac{\exp(n\frac{u^2}{2})}{e^{n\alpha u}}$$

En particulier, pour le choix $u = \alpha$, on obtient l'inégalité

$$\mathbb{P}(S_n \geq n\alpha) \leq \exp(-n\frac{\alpha^2}{2}).$$

(c) On a

$$\mathbb{P}(|S_n| \geq n\alpha) = \mathbb{P}(S_n \geq n\alpha) + \mathbb{P}(-S_n \leq n\alpha)$$

Mais on a vu que S_n et $-S_n$ ont même loi : on a donc $\mathbb{P}(S_n \geq n\alpha) = \mathbb{P}(-S_n \leq n\alpha)$, d'où

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(|S_n| \geq n\alpha) &= 2\mathbb{P}(S_n \geq n\alpha) \\ &\leq 2\exp(-n\frac{\alpha^2}{2}). \end{aligned}$$

4. Soit $\varepsilon > 0$. On va montrer que

$$\mathbb{P}(\limsup_{n\to+\infty} |\frac{S_n}{n^\beta}| \geq \varepsilon) = 0.$$

Pour cela, le lemme de Borel Cantelli nous dit qu'il suffit de montrer que la série de terme général $\mathbb{P}(|\frac{S_n}{n^\beta}| \geq \varepsilon)$ converge.
On a $\mathbb{P}(|\frac{S_n}{n^\beta}| \geq \varepsilon) = \mathbb{P}(|S_n| \geq n\alpha)$ où l'on a posé $\alpha = \varepsilon n^{\beta-1}$. On a donc

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(|\frac{S_n}{n^\beta}| \geq \varepsilon) &\leq 2\exp(-n\frac{\alpha^2}{2}) \\ &\leq 2\exp(-\frac{\varepsilon^2}{2}n^{2\beta-1}) \end{aligned}$$

Comme $\frac{n^{2\beta-1}}{\ln n}$ tend vers $+\infty$ lorsque n tend l'infini, on a $\frac{n^{2\beta-1}}{\ln n} \geq \frac{4}{\varepsilon^2}$ dès que n est assez grand : on a alors $\frac{\varepsilon^2}{2}n^{2\beta-1} \geq 2\ln n$, d'où $\exp(-\frac{\varepsilon^2}{2}n^{2\beta-1}) \leq \frac{1}{n^2}$, ce qui assure que la série de terme général $\mathbb{P}(|\frac{S_n}{n^\beta}| \geq \varepsilon)$ converge, et donc que

$$\mathbb{P}(\limsup_{n\to+\infty} |\frac{S_n}{n^\beta}| \geq \varepsilon) = 0.$$

Comme on a ce résultat pour tout $\varepsilon > 0$, le critère fondamental de convergence presque sûre nous permet de dire que $\frac{S_n}{n^\beta}$ tend presque sûrement vers 0.

FIN