Université de Nancy I **Master 1**

Probabilités et Modélisation Stochastique

Examen du 17 novembre 2007

durée 2h

Les documents papier (livres, polycopiés, notes manuscrites,...) sont autorisés.
Les calculatrices respectant la règlementation (dimensions inférieures à 15 cm par 20 cm, alimentation autonome, pas d'imprimante) sont autorisées.
Tout instrument de communication, qu'il en soit fait ou non usage, est interdit.

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Sur cet espace, on considère une suite $(X_n)_{n\geq 1}$ de variables aléatoires indépendantes telles que l'on ait :

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \quad \mathbb{P}(X_k = 1) = \mathbb{P}(X_k = -1) = \frac{1}{2}.$$

On pose $S_0 = 0$ et, pour $n \geq 1$,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k.$$

$(S_n)_{n\geq 0}$ est la marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}$. Le but de ce problème est de donner quelques résultats concernant cette marche.

– I –

On pose $\mathcal{F}_0 = \{\varnothing, \Omega\}$, puis, pour $n \geq 1$, $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \dots, X_n)$.
Soit R un entier naturel non nul fixé. On pose

$$T = \inf\{n \geq 1 : \quad |S_n| \geq R\}.$$

1. Montrer que la suite $(Y_n)_{n\geq 0}$ définie par
$$Y_n = S_n^2 - n$$
est une martingale adaptée à la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$.
2. Montrer que $(Y_{T\wedge n})_{n\geq 0}$ est une martingale adaptée à la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ et qu'elle prend presque sûrement ses valeurs dans $]-\infty, R^2]$.
3. Montrer que
$$\forall n \geq 0 \quad \mathbb{E}[S_{T\wedge n}^2] = \mathbb{E}[T \wedge n].$$
4. Montrer que la suite $(\mathbb{E}[T \wedge n])_{n\geq 0}$ est bornée.
En déduire que $\mathbb{P}(T < +\infty) = 1$ et $\mathbb{E}[T] < +\infty$.
5. Calculer $\mathbb{E}T$.

– II –

Pour $z \in \mathbb{C}$, on pose $g(z) = \mathbb{E}e^{zX_1}$

1. (a) Montrer que pour tout nombre complexe z, on a
$$g(z) = \cosh z$$

(b) Calculer la fonction caractéristique de X_1, puis la fonction caractéristique de $-X_1$.

(c) Montrer que S_n et $-S_n$ ont même loi.

2. Montrer que pour tout réel u, on a

$$g(u) \leq \exp \frac{u^2}{2}.$$

(On pourra utiliser un développement en série entière.)

3. Soit n un entier strictement positif et soit $\alpha > 0$.

(a) Montrer que

$$\forall u \in \mathbb{R}_+ \quad \mathbb{P}(S_n \geq n\alpha) \leq \frac{g(u)^n}{e^{n\alpha u}}$$

(b) En déduire que

$$\mathbb{P}(S_n \geq n\alpha) \leq \exp(-n\frac{\alpha^2}{2}).$$

(c) Montrer soigneusement que

$$\mathbb{P}(|S_n| \geq n\alpha) \leq 2\exp(-n\frac{\alpha^2}{2}).$$

4. (a) Montrer que quels que soient les réels $\gamma > 0$ et $\delta > 0$, la série de terme général $(\exp(-\delta n^\gamma))_{n\geq 0}$ converge.

(b) Soit $\beta > \frac{1}{2}$. Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{S_n}{n^\beta} = 0 \text{ presque sûrement.}$$

FIN