Université de Nancy I **Master 1**

Nancy-Université
Université Henri Poincaré

Probabilités et Modélisation Stochastique

Examen du 25 octobre 2008

correction

– Exercice –

On pose $Y_n = a_n X_n$ et $Y_n^{(1)} = a_x X_n 1\!\!1_{\{a_n|X_n|\le 1\}}$. D'après le théorème des trois séries, la série de terme général Y_n converge presque sûrement si et seulement si on a simultanément :

–
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(|Y_n| > 1) < +\infty \tag{1}$$
–
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{E}Y_n^{(1)} < +\infty \tag{2}$$
–
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{Var}\ Y_n^{(1)} < +\infty \tag{3}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(|Y_n| > 1) &= \mathbb{P}(|X_n| \ge \tfrac{1}{a_n}) \\
&= \int_{\mathbb{R}\setminus[-\frac{1}{a_n},\frac{1}{a_n}]} d\mathbb{P}_{X_n} \\
&= \int_{\mathbb{R}\setminus[-\frac{1}{a_n},\frac{1}{a_n}]} \frac{1}{2}e^{-|x|}\ d\lambda(x) \\
&= \int_{\frac{1}{a_n}}^{+\infty} e^{-x}\ dx \\
&= \exp(-\frac{1}{a_n})
\end{aligned}$$

Supposons donc que la série de terme général $\exp(-\frac{1}{a_n})$ converge. Ceci entraîne que $\exp(-\frac{1}{a_n})$ a une limite nulle, donc que a_n tend vers 0. Passons alors à la deuxième condition

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}Y_n^{(1)} &= a_n \mathbb{E}X_n 1\!\!1_{\{a_n|X_n|\le 1\}} \\
&= a_n \int_{[-\frac{1}{a_n},\frac{1}{a_n}]} x\ d\mathbb{P}_{X_n}(x) \\
&= a_n \int_{[-\frac{1}{a_n},\frac{1}{a_n}]} x\frac{1}{2}e^{-|x|}\ d\lambda(x) \\
&= 0
\end{aligned}$$

par symétrie. Ainsi la condition (2) est toujours remplie. Passons à la dernière condition. Comme $\mathbb{E}Y_n^{(1)} = 0$, on a Var $Y_n^{(1)} = \mathbb{E}(Y_n^{(1)})^2$. Ainsi,

$$\begin{aligned}\text{Var } Y_n^{(1)} &= a_n^2 \mathbb{E}X_n^2 1\!\!1_{\{a_n|X_n|\leq 1\}} \\ &= a_n^2 \mathbb{E}X_1^2 1\!\!1_{\{a_n|X_1|\leq 1\}}\end{aligned}$$

D'après le théorème de convergence monotone

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}X_1^2 1\!\!1_{\{a_n|X_1|\leq 1\}} = \mathbb{E}X_1^2.$$

Or cette dernière intégrale est finie car

$$\mathbb{E}X_1^2 = \int_{\mathbb{R}} x^2 \, d\mathbb{P}_{X_1}(x) = \int_{\mathbb{R}} x^2 \frac{1}{2} e^{-|x|} \, d\lambda(x) = \int_0^{+\infty} x^2 e^{-x} dx$$

et $x^2 = O(e^{x/2})$. Ainsi Var $Y_n^{(1)} \sim (\mathbb{E}X_1^2) a_n^2$ et donc la dernière série converge si et seulement la série de terme général a_n^2 converge. Finalement, la série converge si et seulement si les séries de termes généraux respectifs a_n^2 et $\exp(-\frac{1}{a_n})$ convergent, mais la convergence de la série de terme général a_n^2 est la condition la plus forte car

$$\exp(-\frac{1}{a_n}) = \frac{1}{\exp(\frac{1}{a_n})} \leq \frac{1}{\frac{1}{2}(\frac{1}{a_n})^2} = 2a_n^2,$$

donc finalement la série de terme général Y_n converge presque sûrement si et seulement si la série de terme général a_n^2 converge.

– **I** –

1. (a) On pose $f(x) = e^{\alpha x}$. f est convexe. Or on a la combinaison convexe $\frac{1-x}{2}(-1) + \frac{1+x}{2}(1)$ (noter que $0 \leq \frac{1-x}{2} \leq 1$ et $\frac{1-x}{2} + \frac{1+x}{2} = 1$. Ainsi $f(x) \leq \frac{1-x}{2} f(-1) + \frac{1+x}{2} f(1)$, soit

$$e^{\alpha x} \leq \frac{1-x}{2} e^{-\alpha} + \frac{1+x}{2} e^{\alpha}.$$

   (b) En substituant dans l'inégalité précédente, on a

$$e^{\alpha X} \leq \cosh\alpha + (\sinh\alpha) X.$$

   Par positivité de l'expérance conditionnelle,

$$\mathbb{E}[e^{\alpha X}|\mathcal{A}] \quad \leq \quad \cosh\alpha + (\sinh\alpha)\mathbb{E}[X|\mathcal{A}] = \cosh\alpha$$

   On a

$$\cosh(\alpha) = \cosh\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha^{2n}}{(2n)!}$$

   et

$$\exp(\alpha^2/2) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\left(\frac{\alpha^2}{2}\right)^n}{n!} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha^{2n}}{2^n n!}$$

   Or pour tout $n \geq 1$, on a

$$\frac{\alpha^{2n}}{(2n)!} = \frac{\alpha^{2n}}{2^n n!} \frac{2 \quad . \; 2 \qquad \dots \quad 2}{(n+1).(n+2)\dots(2n)} \leq \frac{\alpha^{2n}}{2^n n!}$$

   En sommant les inégalités, on obtient bien que $\cosh(\alpha) \leq \exp\frac{\alpha^2}{2}$. D'où finalement

$$\mathbb{E}[e^{\alpha X}|\mathcal{A}] \leq \exp(\frac{\alpha^2}{2}).$$

(c) $e^{\theta(Y_{n+p}-Y_p)} = e^{\theta(Y_{n+p}-Y_{n+p-1})}e^{\theta(Y_{n+p-1}-Y_p)}$. $e^{\theta(Y_{n+p-1}-Y_p)}$ est $\mathcal{F}_{n+p-1}$-mesurable, donc

$$\mathbb{E}[e^{\theta(Y_{n+p}-Y_p)}|\mathcal{F}_{n+p-1}] = \left(e^{\theta(Y_{n+p-1}-Y_p)}\right)\mathbb{E}[e^{\theta D_{n+p}}|\mathcal{F}_{n+p-1}].$$

Cependant, comme (Y_n) est une martingale,

$$\mathbb{E}[Y_{n+p}-Y_{n+p-1}|\mathcal{F}_{n+p-1}] = Y_{n+p}-\mathbb{E}[Y_{n+p-1}|\mathcal{F}_{n+p-1}] = Y_{n+p}-Y_{n+p} = 0.$$

Ainsi si l'on pose $X = \frac{Y_{n+p}-Y_{n+p-1}}{k_{n+p}}$, $\alpha = \theta k_{n+p}$, X est à valeurs dans $[-1,1]$ et $\mathbb{E}[X|\mathcal{A}] = 0$: d'après (b), on a donc

$$\mathbb{E}[e^{\alpha X}|\mathcal{F}_{n+p-1}] \leq \exp(\frac{\alpha^2}{2}) = \exp(\frac{\theta^2}{2}k_{n+p}^2),$$

soit

$$\mathbb{E}[e^{\theta D_{n+p}}|\mathcal{F}_{n+p-1}] \leq \exp(\frac{\theta^2}{2}k_{n+p}^2),$$

d'où le résultat désiré.

2. En prenant l'espérance, on a

$$\mathbb{E}[e^{\theta(Y_{n+p}-Y_p)}] \leq \mathbb{E}[e^{\theta(Y_{n+p-1}-Y_p)}]\exp(\frac{1}{2}\theta^2 k_{n+p}^2),$$

soit

$$\frac{\mathbb{E}[e^{\theta(Y_{n+p}-Y_p)}]}{\mathbb{E}[e^{\theta(Y_{n+p-1}-Y_p)}]} \leq \exp(\frac{1}{2}\theta^2 k_{n+p}^2).$$

En faisant le produit pour n variant de 1 à ℓ, on obtient

$$\frac{\mathbb{E}[e^{\theta(Y_{\ell+p}-Y_p)}]}{\mathbb{E}[e^{\theta(Y_p-Y_p)}]} \leq \prod_{n=1}^{\ell} \exp(\frac{1}{2}\theta^2 k_{n+p}^2),$$

soit

$$\mathbb{E}[e^{\theta(Y_{\ell+p}-Y_p)}] \leq \exp(\frac{1}{2}\theta^2\sum_{n=1}^{\ell}k_{n+p}^2) = \exp\left(\frac{1}{2}\theta^2(L_{\ell+p}-L_p)\right).$$

3. Avec l'inégalité de Markov, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y_{\ell+p}-Y_p \geq x) &\leq \mathbb{P}(e^{\theta(Y_{\ell+p}-Y_p)} \geq e^{\theta x}) \\ &\leq \frac{\mathbb{E}e^{\theta(Y_{\ell+p}-Y_p)}}{e^{\theta x}} \\ &\leq \exp\left(-\theta x + \frac{1}{2}\theta^2(L_{\ell+p}-L_p)\right).\end{aligned}$$

4. En prenant $\theta = \frac{x}{L_{\ell+p}-L_p}$, on obtient

$$\mathbb{P}(Y_{\ell+p}-Y_p \geq x) \leq \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\frac{1}{L_{\ell+p}-L_p})\right).$$

Cependant $(-Y_n)_{n\geq 0}$ est également une martingale, avec $|-Y_n-(-Y_{n-1})| \leq k_n$, donc on a également

$$\mathbb{P}(-Y_{\ell+p}+Y_p \geq x) \leq \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\frac{1}{L_{\ell+p}-L_p}\right).$$

Finalement

$$\mathbb{P}(|Y_{\ell+p}-Y_p| \geq x) \leq \mathbb{P}(Y_{\ell+p}-Y_p \geq x)+\mathbb{P}(-Y_{\ell+p}+Y_p \geq x) \leq 2\exp\left(-\frac{x^2}{2(L_{\ell+p}-L_p)}\right).$$

– **II** –

1. Comme $|X|$ est une variable aléatoire positive, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}|X| &= \int_{\mathbb{R}^+} \mathbb{P}(|X| > x)\ d\lambda(x) \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^+} 2\exp(-\frac{x^2}{2a^2})\ d\lambda(x) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \exp(-\frac{x^2}{2a^2})\ d\lambda(x) \\
&= \sqrt{2\pi a^2} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi a^2}} \exp(-\frac{x^2}{2a^2})\ d\lambda(x) \\
&= \sqrt{2\pi} a
\end{aligned}$$

En effet, on a reconnu en $\frac{1}{2\pi a^2}\exp(-\frac{x^2}{2a^2})$ la densité d'une variable aléatoire $\mathcal{N}(0, a^2)$, donc son intégrale fait 1.

2. (a) $(Y_{\ell+p} - Y_p)_{\ell \geq 1}$ est une martingale, donc d'après l'inégalité de Doob

$$\mathbb{P}(\max_{1\leq \ell \leq n} |Y_{\ell+p} - Y_p| > \varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon}\mathbb{E}|Y_{n+p} - Y_p|$$

D'après I.4 et II.1, on a

$$\mathbb{E}|Y_{n+p} - Y_p| \leq \sqrt{2\pi(L_{n+p} - L_p)}.$$

Cependant

$$L_{n+p} - L_p = \sum_{i=p+1}^{p+n} k_i^2 \leq \sum_{i=p+1}^{p+\infty} k_i^2 = \alpha_p,$$

d'où

$$\mathbb{E}|Y_{n+p} - Y_p| \leq \sqrt{2\pi\alpha_p},$$

et enfin

$$\mathbb{P}(M_{p,n} > \varepsilon) \leq \frac{\sqrt{2\pi\alpha_p}}{\varepsilon}.$$

(b) Par définition de la borne supérieure

$$\begin{aligned}
\{M'_p > \varepsilon\} &= \bigcup_{\ell \geq 1} \{|Y_{\ell+p} - Y_p| > \varepsilon\} \\
&= \bigcup_{n=1}^{+\infty} \bigcup_{1\leq \ell \leq n} \{|Y_{\ell+p} - Y_p| > \varepsilon\} \\
&= \bigcup_{n=1}^{+\infty} \{M_{p,n} > \varepsilon\}
\end{aligned}$$

L'union est croissante, donc

$$\mathbb{P}(M'_p > \varepsilon) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(M_{p,n} > \varepsilon).$$

Or d'après la question précédente $\mathbb{P}(M_{p,n} > \varepsilon) \leq \frac{\sqrt{2\pi\alpha_p}}{\varepsilon}$ pour tout n, donc

$$\mathbb{P}(M'_p > \varepsilon) \leq \frac{\sqrt{2\pi\alpha_p}}{\varepsilon}.$$

(c) $|Y_k - Y_\ell| > \varepsilon$ entraîne $|Y_k - Y_n| > \varepsilon/2$ ou $|Y_\ell - Y_n| > \varepsilon/2$. Ainsi,

$$\begin{array}{rcl} \{M''_n > \varepsilon\} & = & \cup_{k,\ell \geq n}\{|Y_k - Y_\ell| > \varepsilon\} \\ & \subset & \{\exists k \geq n \quad |Y_k - Y_n| > \varepsilon/2\} \\ & = & \{M'_n \subset \varepsilon/2\} \end{array}$$

D'où

$$\mathbb{P}(M''_n > \varepsilon) \leq \mathbb{P}(M'_n > \varepsilon/2) \leq \frac{\sqrt{2\pi}\alpha_p}{\varepsilon/2} = \frac{2\sqrt{2\pi}\alpha_p}{\varepsilon}.$$

(d) Posons, pour $\varepsilon > 0$,

$$A_\varepsilon = \{\exists n_0; \forall k, \ell \geq n_0 \quad |Y_k - Y_\ell| \leq \varepsilon\}.$$

Soit $n \geq 1$. $A_\varepsilon \supset \{M'_n \leq \varepsilon\}$, donc

$$\mathbb{P}(A_\varepsilon) \geq \mathbb{P}(M'_n \leq \varepsilon) = 1 - \mathbb{P}(M'_n > \varepsilon) \geq 1 - \frac{2\sqrt{2\pi}\alpha_n}{\varepsilon}.$$

En faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient $\mathbb{P}(A_\varepsilon) = 1$.

Sur $\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_{1/n}$, Y_n est une suite de Cauchy, donc converge. Mais $\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_{1/n}$ est une intersection dénombrable d'événements de probabilité un, donc est de probabilité un. Finalement, $(Y_n)_{n\geq 1}$ converge presque sûrement.

3. Comme (Y_n) est une martingale, il suffit de montrer que la suite est bornée dans L^1. Or, d'après la preuve de II.2.a, pour tout $n \geq 0$, on a $\mathbb{E}|Y_n - Y_0| \leq \sqrt{2\pi\alpha_0}$. Commme Y_0 est intégrable, (Y_n) est donc bien une martingale bornée dans L^1.
4. Soit $\varepsilon > 0$.

$$\{|Z - Y_0| > x\} \subset \{|Y_n - Y_0| > x - \varepsilon\} \cup \{|Y_n - Z| > \varepsilon\},$$

donc

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}(Z - Y_0| > x) & \leq & \mathbb{P}(|Y_n - Y_0| > x - \varepsilon) + \mathbb{P}(|Y_n - Z| > \varepsilon) \\ & \leq & 2\exp\left(-\dfrac{(x-\varepsilon)^2}{2\alpha_0}\right) + \mathbb{P}(|Y_n - Z| > \varepsilon) \end{array}$$

grâce à I.5 et l'inégalité $L_n - L_0 \leq \alpha_0$. Y_n tend presque sûrement vers Z donc en probabilité vers Z, d'où en faisant tendre n vers $+\infty$.

$$\mathbb{P}(Z - Y_0| > x) \leq 2\exp(-\frac{(x-\varepsilon)^2}{2\alpha_0}).$$

En faisant tendre ε vers 0 et en posant $\sigma^2 = \alpha_0$, on obtient bien

$$\mathbb{P}(|Z - Y_0| > x) \leq 2\exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right).$$

FIN