Université de Nancy I **Master 1**

Probabilités et Modélisation Stochastique

Examen du 25 octobre 2008

durée 3h

Les documents papier (livres, polycopiés, notes manuscrites,...) sont autorisés.
Les calculatrices respectant la réglementation (dimensions inférieures à 15 cm par 20 cm, alimentation autonome, pas d'imprimante) sont autorisées.
Tout instrument de communication, qu'il en soit fait ou non usage, est interdit.

Le sujet est constitué d'un exercice et d'un problème indépendants.

Toutes les variables aléatoires considérées dans le sujet sont à valeurs réelles et définies sur un même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.
L'opérateur d'espérance est noté $\mathbb{E}$.

Tout résultat donné dans l'énoncé peut être admis pour traiter les questions suivantes.

– Exercice –

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant la loi de Laplace, c'est à dire telle que la loi de X_n sous $\mathbb{P}$ admette la densité $x \mapsto \frac{1}{2}e^{-|x|}$ par rapport à la mesure de Lebesgue. Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite de réels strictement positifs.

Énoncer et démontrer une condition nécessaire et suffisante sur la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ pour que la série de terme général $a_n X_n$ converge presque sûrement.

– Problème –

Soit $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ une filtration et $(Y_n)_{n\geq 0}$ une martingale adaptée à la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$.

On suppose qu'il existe des réels $(k_n)_{n\geq 1}$ tels que $|Y_n - Y_{n-1}| \leq k_n$ presque sûrement.

On suppose que la série de terme général k_n^2 est convergente et on note la suite des sommes partielles :

$$L_n = \sum_{i=1}^{n} k_i^2.$$

Le but du problème est de montrer que cette martingale converge vers une variable aléatoire Z dont la queue décroit comme celle d'une variable aléatoire gaussienne.

****

À toutes fins utiles, on donne les résultats suivants, qu'il n'est pas nécessaire de redémontrer :

- *Inégalité de Doob* : Si $(X_n)_{n\geq 1}$ est une martingale, alors pour tout n et pour tout $\alpha > 0$
$$\mathbb{P}(\max_{1\leq k\leq n} |X_k| \geq \alpha) \leq \frac{\mathbb{E}|X_n|}{\alpha}$$
- *Théorème de convergence de Doob* : Si $(X_n)_{n\geq 1}$ est une martingale telle que $\sup_{n\geq 1} \mathbb{E}|X_n| < +\infty$, alors $(X_n)_{n\geq 1}$ converge presque sûrement.

****

– I –

1. (a) Montrer que pour tout $\alpha > 0$, pour tout $x \in [-1, 1]$, on a
$$e^{\alpha x} \leq \frac{1-x}{2}e^{-\alpha} + \frac{1+x}{2}e^{\alpha} = \cosh\alpha + x\sinh\alpha.$$
   (b) Soient X une variable aléatoire à valeurs dans $[-1, 1]$ et $\mathcal{A}$ une sous-tribu de $\mathcal{F}$. On suppose que $\mathbb{E}[X|\mathcal{A}] = 0$. Montrer que
$$\mathbb{E}[e^{\alpha X}|\mathcal{A}] \leq \cosh\alpha \leq \exp(\frac{\alpha^2}{2}).$$
   Pour la dernière inégalité, on suggère d'utiliser un développement en série.

   (c) Pour $n \geq 1$, on pose $D_n = Y_n - Y_{n-1}$.

   Montrer que quels que soient les entiers naturels n et p,
$$\mathbb{E}[e^{\theta(Y_{n+p}-Y_p)}|\mathcal{F}_{n+p-1}] = e^{\theta(Y_{n+p-1}-Y_p)}\mathbb{E}[e^{\theta D_{n+p}}|\mathcal{F}_{n+p-1}],$$
   puis que
$$\mathbb{E}[e^{\theta(Y_{n+p}-Y_p)}|\mathcal{F}_{n+p-1}] \leq e^{\theta(Y_{n+p-1}-Y_p)}\exp(\frac{1}{2}\theta^2 k_{n+p}^2).$$

2. En déduire que quels que soient les entiers naturels ℓ et p,

$$\mathbb{E}[e^{\theta(Y_{\ell+p}-Y_p)}] \leq \exp\left(\frac{1}{2}\theta^2(L_{\ell+p}-L_p)\right).$$

3. Montrer que pour tout $\theta > 0$ et quels que soient les entiers naturels p et ℓ,

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \mathbb{P}(Y_{\ell+p}-Y_p \geq x) \leq \exp\left(-\theta x + \frac{1}{2}\theta^2(L_{\ell+p}-L_p)\right).$$

4. Montrer enfin que quels que soient les entiers naturels p et ℓ,

$$\forall x \geq 0 \quad \mathbb{P}(|Y_{\ell+p}-Y_p| \geq x) \leq 2\exp\left(-\frac{x^2}{2(L_{\ell+p}-L_p)}\right).$$

– II –

1. Soient X une variable aléatoire et a un réel strictement positif tels que

$$\forall x \geq 0 \quad \mathbb{P}(|X| \geq x) \leq 2\exp(-\frac{x^2}{2a^2}).$$

Montrer que

$$\mathbb{E}|X| \leq \sqrt{2\pi}a.$$

2. On suppose désormais que la série de terme général k_n^2 converge et l'on pose, pour n entier naturel

$$\alpha_n = \sum_{i=n+1}^{+\infty} k_i^2.$$

Soient p un entier naturel et n un entier naturel non nul.

(a) On pose $M_{p,n} = \max((|Y_{\ell+p}-Y_p|); 1 \leq \ell \leq n)$. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, on a

$$\mathbb{P}(M_{p,n} > \varepsilon) \leq \frac{\sqrt{2\pi\alpha_p}}{\varepsilon}.$$

(b) On pose $M'_p = \sup((|Y_{\ell+p}-Y_p|); \ell \geq 1)$. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, on a

$$\mathbb{P}(M'_p > \varepsilon) \leq \frac{\sqrt{2\pi\alpha_p}}{\varepsilon}.$$

(c) On pose $M''_n = \sup((|Y_k - Y_\ell|); k \geq n; \ell \geq n)$. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, on a

$$\mathbb{P}(M''_n > \varepsilon) \leq \frac{2\sqrt{2\pi\alpha_n}}{\varepsilon}.$$

(d) À l'aide de la question précédente, montrer que $(Y_n)_{n\geq 1}$ converge presque sûrement vers une variable aléatoire Z.

3. Retrouver directement le résultat précédent en utilisant un théorème de convergence des martingales.

4. Montrer qu'il existe $\sigma^2 > 0$ tel que pour tout $x \geq 0$:

$$\mathbb{P}(|Z - Y_0| > x) \leq 2\exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right).$$

FIN