Université de Nancy I **Master 1**

Nancy-Université
Université Henri Poincaré

Probabilités et Modélisation Stochastique

correction de l'examen du 13 octobre 2007

– I –

1. $U_n = \sum_{j=1}^{n} Z_j$ et $U_{n+k} = \sum_{j=1}^{n+k} Z_j$, donc $U_{n+k} - U_n = \sum_{j=n+1}^{n+k} Z_j$, puis

$$(U_{n+k} - U_n)^2 = \sum_{j=n+1}^{n+k} \sum_{j'=n+1}^{n+k} Z_j Z_{j'},$$

d'où

$$\mathbb{E}[(U_{n+k} - U_n)^2] = \sum_{j=n+1}^{n+k} \sum_{j'=n+1}^{n+k} \mathbb{E} Z_j Z_{j'}.$$

Il vient

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[(U_{n+k} - U_n)^2] &\leq \sum_{j=n+1}^{n+k} \sum_{j'=n+1}^{n+k} |\mathbb{E} Z_j Z_{j'}| \\
&\leq \sum_{j=n+1}^{n+k} \sum_{j'=n+1}^{n+k} \gamma_{j-j'} \\
&\leq \sum_{j=n+1}^{n+k} \sum_{j'\in\mathbb{Z}} \gamma_{j-j'} \\
&\leq \sum_{j=n+1}^{n+k} M \\
&\leq Mk,
\end{aligned}$$

où l'on a posé $M = \sum_{p\in\mathbb{Z}} \gamma_p < +\infty$. On remarque qu'en particulier $\mathbb{E}U_k^2 = \mathbb{E}(U_k - U_0)^2 \leq Mk$.

2. (a) En utilisant l'inégalité de Markov, on a

$$u_n = \mathbb{P}(|U_{n^2}| > \varepsilon n^2) \leq \mathbb{P}(U_{n^2}^2 > \varepsilon^2 n^4) \leq \frac{\mathbb{E}U_{n^2}^2}{\varepsilon^2 n^4} \leq \frac{Mn^2}{\varepsilon^2 n^4} = \frac{M\varepsilon^{-2}}{n^2}$$

ce qui assure la convergence de la série

(b) Soit $\varepsilon > 0$. Comme la série de terme général $\mathbb{P}(|U_{n^2}| > \varepsilon n^2) = \mathbb{P}(\frac{|U_{n^2}|}{n^2} > \varepsilon n^2)$ converge, le lemme de Borel-Cantelli assure que

$$\mathbb{P}(\limsup_{n\to+\infty}\{\frac{|U_{n^2}|}{n^2} > \varepsilon n^2\}) = 0.$$

Comme ε est quelconque, le critère fondamental de convergence presque sûre entraîne que la suite $(\frac{U_{n^2}}{n^2})_{n\geq 1}$ converge presque sûrement vers 0.

3. On pose, pour $n \geq 1$,

$$V_n = \max\{|U_k - U_{n^2}| : n^2 < k < (n+1)^2\}.$$

(a) Soit $\varepsilon > 0$. Par définition de V_n, on a

$$\{V_n > \varepsilon n^2\} \quad = \quad \bigcup_{n^2<k<(n+1)^2} \{|U_k - U_{n^2}| > \varepsilon n^2\}$$

D'où

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(V_n > \varepsilon n^2) &\leq \sum_{n^2<k<(n+1)^2} \mathbb{P}(|U_k - U_{n^2}| > \varepsilon n^2) \\ &= \sum_{k=n^2+1}^{(n+1)^2-1} \mathbb{P}(|U_k - U_{n^2}| > \varepsilon n^2). \end{aligned}$$

(b) Soit $n \geq 1$ et k entre n^2+1 et $(n+1)^2-1$: on peut écrire $k = n^2+\ell$, avec $\ell \in \{1,\ldots,2n\}$. On a

$$\mathbb{P}(|U_k - U_{n^2}| > \varepsilon n^2) = \mathbb{P}((U_k - U_{n^2})^2 > \varepsilon^2 n^4) \leq \frac{\mathbb{E}(U_{n^2} - U_k)^2}{\varepsilon^2 n^4} \leq \frac{M\ell}{\varepsilon^2 n^4} \leq \frac{2M\varepsilon^{-2}}{n^3},$$

d'où

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(V_n > \varepsilon n^2) &\leq \sum_{k=n^2+1}^{(n+1)^2-1} \mathbb{P}(|U_k - U_{n^2}| > \varepsilon n^2) \\ &\leq \sum_{k=n^2+1}^{(n+1)^2-1} \frac{2M\varepsilon^{-2}}{n^3} \\ &\leq (2n)\frac{2M\varepsilon^{-2}}{n^3} = \frac{4M\varepsilon^{-2}}{n^2} \end{aligned}$$

Comme précédemment, le lemme de Borel-Cantelli et le critère fondamental de convergence presque sûre entraîne alors que $(\frac{V_n}{n^2})_{n\geq 1}$ converge presque sûrement vers 0.

4. Posons $M_n = \max\{\frac{|U_k|}{k} : n^2 \leq k < (n+1)^2\}$ Soit $n \geq 1$ et k un entier avec $n^2 \leq k < (n+1)^2$: on a

$$\frac{|U_k|}{k} \leq \frac{|U_k|}{n^2} \leq \frac{|U_{n^2}| + |U_{n^2} - U_k|}{n^2} = \frac{|U_{n^2}|}{n^2} + \frac{|U_{n^2} - U_k|}{n^2} \leq \frac{|U_{n^2}|}{n^2} + \frac{V_n}{n^2}$$

En passant au max en k, on obtient

$$M_n \leq \frac{|U_{n^2}|}{n^2} + \frac{V_n}{n^2}.$$

D'après les questions précédentes, cela entraîne que M_n tend presque sûrement vers 0. Mais pour tous les ω tels que $M_n(\omega)$ tend vers 0 $\frac{U_k(\omega)}{k}$ tend vers 0. En effet, soit $\varepsilon > 0$: il existe $n_0 = n_0(\omega, \varepsilon)$ tel que $M_n(\omega) < \varepsilon$ pour $n > n_0$, et par définition de M_n, on a $\frac{|U_k|(\omega)}{k} < \varepsilon$ pour $k > n_0^2$. Comme ε est quelconque cela entraîne que la suite $(\frac{U_k(\omega)}{k})_{k\geq 1}$ converge vers 0 pour ω dans un ensemble de probabilité 1, ce qui achève la preuve.

– II –

1. Posons $Y_i = \sum_{k=0}^{i} c_k \zeta_{n-k}$. Pour tout i, Y_i est intégrable, centré car c'est une combinaison linéaire de variables intégrables, centrées. On va montrer que la suite (Y_i) est de Cauchy dans L^2 : soit $\varepsilon > 0$: comme la série des c_k^2 converge, il existe i_0 tel que le reste $\sum_{k=i_0+1}^{+\infty} c_k^2$ ne dépasse pas ε^2. Pour i et p entiers, on a

$$Y_{i+p} - Y_i = \sum_{k=i+1}^{i+p} c_k \zeta_{n-k}.$$

On reconnait une somme de variables aléatoires indépendantes, de carrés intégrables : on a donc

$$\begin{aligned}
\|Y_{i+p} - Y_i\|_2^2 &= \mathbb{E}(Y_{i+p} - Y_i)^2 = \text{Var}\,[Y_{i+p} - Y_i] \\
&= \sum_{k=i+1}^{i+p} \text{Var}\,(c_k \zeta_{n-k}) = \sum_{k=i+1}^{i+p} c_k^2 \text{Var}\,\zeta_{n-k} \\
&= \sum_{k=i+1}^{i+p} c_k^2 \leq \sum_{k=i+1}^{+\infty} c_k^2
\end{aligned}$$

Ainsi $i \geq i_0 \Longrightarrow \|Y_{i+p} - Y_i\|_2 \leq \varepsilon$. Comme ε est quelconque, on a bien montré que (Y_i) est de Cauchy, ce qui suffit à montrer que (Y_i) converge dans L^2 qui est complet.

2. On sait que pour une série de variables aléatoires indépendantes, la convergence en probabilité entraîne la convergence presque sûre. Comme la convergence dans L^2 implique la convergence en probabilité, le résultat s'ensuit.

– III –

1. Par construction, $X_{\ell+n}$ est dans L^2 ; elle est donc en particulier dans L^1 ce qui suffit à justifier l'existence de l'espérance conditionnelle. Posons

$$R = \sum_{k \geq n} c_k \zeta_{\ell+n-k} \text{ et } D = \sum_{k=0}^{n-1} c_k \zeta_{\ell+n-k}. \text{ On a alors } X_{n+\ell} = D + R.$$

Pour tout $k \geq n$, $\ell+n-k \leq \ell$, donc $\zeta_{\ell+n-k}$ est $\mathcal{F}_\ell$ mesurable ; par suite R est $\mathcal{F}_\ell$ mesurable (la mesurabilité est préservée par la convergence presque sûre). On a donc évidemment $\mathbb{E}[R|\mathcal{F}_\ell] = R$.
Pour tout $k < n$, $\ell+n-k > \ell$, donc $\zeta_{\ell+n-k}$ est $\sigma(\zeta_i, i > \ell)$ mesurable ; par suite D est $\sigma(\zeta_i, i > \ell)$ mesurable. Mais, d'après le théorème d'associativité de l'indépendance, les tribus $\sigma(\zeta_i, i < \ell)$ et $\mathcal{F}_\ell$ sont indépendantes : on a donc $\mathbb{E}[D|\mathcal{F}] = \mathbb{E}[D] = 0$. D'où

$$\mathbb{E}[X_{\ell+n}|\mathcal{F}_\ell] = \mathbb{E}[D+R|\mathcal{F}_\ell] = \mathbb{E}[D|\mathcal{F}_\ell] + \mathbb{E}[R|\mathcal{F}_\ell] = 0 + R = \sum_{k \geq n} c_k \zeta_{\ell+n-k}.$$

2. (a) Comme L^2 est complet, il suffit de montrer que la série de terme général $\|\mathbb{E}[X_{\ell+n}|\mathcal{F}_\ell]\|_2$ converge. En reprenant les arguments invoqués au II.1, on voit que la suite $Y'_{n+\ell,i} = \sum_{k=n}^{n+i} c_k \zeta_{n-k}$ converge (lorsque i tend vers l'infini) dans L^2 vers $\mathbb{E}[X_{\ell+n}|\mathcal{F}_\ell] = \sum_{k \geq n} c_k \zeta_{\ell+n-k}$. Il en découle que

$$\|\mathbb{E}[X_{\ell+n}|\mathcal{F}_\ell]\|_2 = \lim_{i \to +\infty} \left\| \sum_{k=n}^{n+i} c_k \zeta_{n-k} \right\|_2$$

Or, comme au II.1

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k=n}^{n+i} c_k \zeta_{n-k} \right\|_2^2 &= \sum_{k=n}^{n+i} \operatorname{Var}\,(c_k \zeta_{n-k}) \\ &= \sum_{k=n}^{n+i} c_k^2, \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \|\mathbb{E}[X_{\ell+n}|\mathcal{F}_\ell]\|_2 &= \lim_{i \to +\infty} \left(\sum_{k=n}^{n+i} c_k^2 \right)^{1/2} \\ &= r_n \end{aligned}$$

Comme la série de terme général r_n converge, cela donne le résultat voulu.

(b) On a, dans L^2, l'identité

$$\begin{aligned} Z_\ell &= \sum_{n\geq 1} \mathbb{E}[X_{\ell+n}|\mathcal{F}_\ell] \\ &= \sum_{n\geq 1}\sum_{k\geq n} c_k\zeta_{\ell+n-k} \end{aligned}$$

De même

$$X_\ell = \sum_{k\geq 0} c_k\zeta_{\ell-k},$$

d'où l'identité dans L^2 :

$$Z_\ell + X_\ell = \sum_{n\geq 0}\sum_{k\geq n} c_k\zeta_{\ell+n-k}.$$

Ensuite,

$$\begin{aligned} Z_{\ell-1} &= \sum_{n\geq 1}\sum_{k\geq n} c_k\zeta_{\ell-1+n-k} \\ &= \sum_{n\geq 0}\sum_{k\geq n+1} c_k\zeta_{\ell-1+(n+1)-k} \\ &= \sum_{n\geq 0}\left(\left(\sum_{k\geq n} c_k\zeta_{\ell+n-k}\right) - c_n\zeta_\ell\right) \end{aligned}$$

La série de terme général $((\sum_{k\geq n} c_k\zeta_{\ell+n-k}) - c_n\zeta_\ell)_{n\geq 0}$ converge dans L^2 (sa somme est $Z_{\ell-1}$) ; de même la série de terme général $((\sum_{k\geq n} c_k\zeta_{\ell+n-k}))_{n\geq 0}$ converge dans L^2 (sa somme est $X_\ell + Z_\ell$), donc la série de terme général $c_n\zeta_\ell$ converge dans L^2. Cela entraîne bien sûr que la série de terme général c_n converge dans $\mathbb{R}$ et l'on a

$$\begin{aligned} Z_{\ell-1} &= -\left(\sum_{n\geq 0} c_n\right)\zeta_\ell + \sum_{n\geq 0}\left(\sum_{k\geq n} c_k\zeta_{\ell+n-k}\right) \\ &= -\left(\sum_{n\geq 0} c_n\right)\zeta_\ell + X_\ell + Z_\ell, \end{aligned}$$

ce qui donne bien l'identité demandée avec $s = \sum_{n\geq 0} c_n$.

(c) $S'_n = \sum_{\ell=1}^n s\zeta_\ell$ est la somme de n variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées, centrées, admettant un moment d'ordre 2. Ainsi, d'après le théorème central limite $S'_n/\sqrt{n}$ converge presque sûrement vers $\mathcal{N}(0, s^2)$.

(d) En sommant l'identité $X_\ell + Z_\ell - Z_{\ell-1} = sX_\ell$ pour ℓ variant de 1 à n, on obtient

$$S_n + Z_n - Z_0 = s(\sum_{\ell=1}^{n} \zeta_\ell),$$

d'où

$$\frac{S_n}{\sqrt{n}} = \frac{S'_n}{\sqrt{n}} - \frac{Z_n}{\sqrt{n}}.$$

Soit $t \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
|\mathbb{E}\exp(\frac{it}{\sqrt{n}}S_n) - \mathbb{E}\exp(\frac{it}{\sqrt{n}}S'_n)| &\leq [\mathbb{E}|\exp(\frac{it}{\sqrt{n}}S_n) - \exp(\frac{it}{\sqrt{n}}S'_n)|] \\
&\leq \mathbb{E}|1 - \exp(\frac{itZ_n}{\sqrt{n}})| \\
&\leq \mathbb{E}\frac{|tZ_n|}{\sqrt{n}} \\
&\leq \frac{|t|\mathbb{E}|Z_n|}{\sqrt{n}} \\
&\leq \frac{|t|\mathbb{E}|Z_1|}{\sqrt{n}}
\end{aligned}$$

La dernière égalité provient du fait que les (Z_n) sont des variables de même loi intégrables (car elles sont dans L^2). Ainsi, $\mathbb{E}\exp(\frac{it}{\sqrt{n}}S_n) - \mathbb{E}\exp(\frac{it}{\sqrt{n}}S'_n)$ tend vers 0. Mais d'après le théorème central limite $S'_n/\sqrt{n}$ converge en loi vers $\mathcal{N}(0, s^2)$ et donc $\mathbb{E}\exp(\frac{it}{\sqrt{n}}S'_n)$ vers $\exp(\frac{1}{2}t^2s^2)$. Par suite, $\mathbb{E}\exp(\frac{it}{\sqrt{n}}S_n)$ converge vers $\exp(\frac{1}{2}t^2s^2)$ et donc, d'après le théorème de Lévy, $S_n/\sqrt{n}$ converge en loi vers $\mathcal{N}(0, s^2)$.

Commentaires particuliers

I.1 De trop nombreux candidats semblent ignorer l'écriture

$$(\sum_{k=1}^{n} x_k)^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i x_j$$

et ne connaître que l'expression

$$(\sum_{k=1}^{n} x_k)^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2 \sum_{1\le i<j\le n} x_i x_j$$

dont ils ne savent se dépétrer. Pourtant, de telles écritures apparaissent couramment, en particulier dans l'étude des formes quadratiques.
Certains imaginent alors que l'identité $\mathbb{E}X_i^2 = (\mathbb{E}X_i)^2$ (qui est évidemment fausse) va leur permettre de s'en sortir. Rappelons que si une variable aléatoire positive est d'espérance nulle, elle est presque sûrement nulle : une telle situation viderait évidemment le problème de tout intérêt. Les erreurs sont toujours possibles, mais il faut essayer de garder du recul par rapport à ce que l'on écrit, cela permet de les identifier et de les corriger. De manière générale, une attitude critique par rapport à ses propres écrits est toujours payante.

I.1, encore Une rédaction étrange a souvent été trouvée : une fois établi que

$$\mathbb{E}[(U_{n+k} - U_n)^2] \quad \le \quad \sum_{j=n+1}^{n+k} \sum_{j\in\mathbb{Z}} \gamma_j,$$

plusieurs candidats écrivent : “comme la série converge, il existe M tel que

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} \gamma_j \le M'',$$

puis concluent –ce qui est vrai – que $\mathbb{E}[(U_{n+k} - U_n)^2] \le Mk$. Mais si la série converge, il est aussi simple de poser $M = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \gamma_j$! Ainsi, on a le sentiment que le bien fondé de l'écriture $\sum_{j\in\mathbb{Z}} \gamma_j$ n'est pas complètement assuré dans les esprits.

I.1, toujours Plusieurs candidats, n'ayant obtenu qu'une majoration

$$\mathbb{E}[(U_{n+k} - U_n)^2] \quad \le Mk^2$$

pensent pouvoir poser $M' = M/k$, et ainsi obtenir par ce tour de passe-passe $\mathbb{E}[(U_{n+k} - U_n)^2] \le M'k$. Le problème, c'est que le M' ainsi obtenu dépend de k, alors qu'on avait demandé une majoration uniforme en n et en k. Il faut ainsi toujours faire attention à l'ordre des quantificateurs dans les propriétés dont la démonstration est demandée.

I.3.a On a souvent rencontré l'erreur suivante, qui consiste à dire que pour des variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$, il existe k_0 tel que

$$\{\max(X_1, \ldots, X_n) \geq h\} = \{X_{k_0} \geq h\}.$$

Or c'est faux : il est vrai que pour tout $\omega \in \{\max(X_1, \ldots, X_n) \geq h\}$, il existe $k_0(\omega)$ tel que $X_{k_0}(\omega) \geq h$, mais il n'existe pas nécessairement de k_0 qui convienne pour tous les ω.

II.1 L'expression "montrer que la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge" signifie bien que le but de la question est de donner un sens mathématique à l'expression "$\sum_{n\geq 0} u_n$" . Toute tentative de preuve qui commencerait par des calculs sur cette expression en supposant que son statut mathématique est défini est vouée à l'échec.

III.1 Très peu de candidat comprennent qu'il suffit de montrer que $X_{\ell+n}$ est intégrable pour justifier de l'existence de l'espérance conditionnelle. La plupart se lance dans une longue discussion complètement hors-sujet.

III.4 Étonnament peu de succès pour cette question de cours très facile. Sans grapiller de manière outrancière, il est quand même bon de lire le sujet entièrement, et ce faisant, d'y repérer les endroits où l'on pourra faire valoir ses compétences.