Université de Nancy I **Master 1**

Nancy-Université
Université Henri Poincaré

Probabilités et Modélisation Stochastique

Examen du 13 octobre 2007

durée 3h

Les documents papier (livres, polycopiés, notes manuscrites,...) sont autorisés.
Les calculatrices respectant la règlementation (dimensions inférieures à 15 cm par 20 cm, alimentation autonome, pas d'imprimante) sont autorisées.
Tout instrument de communication, qu'il en soit fait ou non usage, est interdit.

Toutes les variables aléatoires considérées dans ce problème sont à valeurs réelles et définies sur un même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. L'opérateur d'espérance est noté $\mathbb{E}$. L'expression “presque sûrement” est parfois abrégée en p.s., tandis que la convergence en moyenne quadratique est appelée convergence dans L^2. Tout résultat donné dans l'énoncé peut être admis pour traiter les questions suivantes.

– I –

$(\gamma_p)_{p\in\mathbb{Z}}$ est une suite de réels positifs tels que $\displaystyle\sum_{p\in\mathbb{Z}} \gamma_p < +\infty$.

Soit $(Z_n)_{n\geq 0}$ une suite de variables aléatoires de carrés intégrables telles que, quels que soient les entiers naturels i et j, on ait

$$\mathbb{E}[Z_i] = 0, \quad \mathbb{E}|Z_i Z_j| \leq \gamma_{i-j}.$$

On pose $U_0 = 0$ et, pour $n \geq 1$, $U_n = \sum_{k=1}^n Z_k$.

1. Montrer que, pour tout $n \geq 0$ et $k \geq 0$, on a

$$\mathbb{E}[(U_{n+k} - U_n)^2] \leq \sum_{i=n+1}^{n+k} \sum_{j=n+1}^{n+k} \gamma_{i-j}.$$

En déduire qu'il existe une constante M telle que, pour tout $n \geq 0$ et $k \geq 0$, on a

$$\mathbb{E}[(U_{n+k} - U_n)^2] \leq Mk.$$

2. (a) Pour $\varepsilon > 0$, établir la convergence de la série de terme général

$$u_n = \mathbb{P}(|U_{n^2}| > \varepsilon n^2).$$

   (b) Prouver que la suite $(\frac{U_{n^2}}{n^2})_{n\geq 1}$ converge presque sûrement vers 0.

3. On pose, pour $n \geq 1$,

$$V_n = \max\{|U_k - U_{n^2}| : n^2 < k < (n+1)^2\}.$$

   (a) Soit $\varepsilon > 0$. Justifier l'inégalité

$$\mathbb{P}(V_n > \varepsilon n^2) \leq \sum_{k=n^2+1}^{(n+1)^2-1} \mathbb{P}(|U_k - U_{n^2}| > \varepsilon n^2).$$

(b) Prouver que la suite $(\frac{V_n}{n^2})_{n\geq 1}$ converge presque sûrement vers 0.

4. Conclure que la suite $(\frac{U_k}{k})_{k\geq 1}$ converge presque sûrement vers 0.

– II –

Désormais $(c_k)_{k\geq 0}$ est une suite de réels telle que $\sum_{k\geq 0} c_k^2 < +\infty$ et $(\zeta_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées, de carrés intégrables, telles que, pour tout $k \in \mathbb{Z}$,

$$\mathbb{E}[\zeta_k] = 0, \quad \mathbb{E}[\zeta_k^2] = 1.$$

Pour $n \in \mathbb{Z}$, on note $\mathcal{F}_n$ la tribu engendrée par les variables aléatoires $(\zeta_i)_{i\leq n}$, c'est à dire la plus petite sous-tribu de $\mathcal{F}$ rendant mesurables ces variables aléatoires.

1. Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, la série $\sum_{k\geq 0} c_k \zeta_{n-k}$ converge dans L^2.
2. Indiquer pourquoi cette convergence est aussi vraie presque sûrement.

On pose dorénavant, pour $n \in \mathbb{Z}$, $X_n = \sum_{k\geq 0} c_k \zeta_{n-k}$ et, pour $n \geq 1$,

$$S_n = \sum_{\ell=1}^{n} X_\ell.$$

– III –

1. Soit $n \in \mathbb{Z}$ et $\ell \geq 0$. Justifier l'existence de $\mathbb{E}[X_{n+\ell}|\mathcal{F}_\ell]$ et établir l'égalité

$$\mathbb{E}[X_{\ell+n}|\mathcal{F}_\ell] = \sum_{k\geq n} c_k \zeta_{\ell+n-k} \text{ p.s.}$$

2. On pose, pour $n \geq 0$, $r_n = (\sum_{k\geq n} c_k^2)^{1/2}$, et on fait l'hypothèse $\sum\limits_{n\geq 0} r_n < +\infty$. On désigne ci-dessous par ℓ un entier naturel.
   (a) Prouver que la série $\sum_{n\geq 1} \mathbb{E}[X_{\ell+n}|\mathcal{F}_\ell]$ converge dans L^2.
   (b) Soit Z_ℓ la somme de cette série. Vérifier qu'il existe une constante s telle que, pour $\ell \geq 1$,
   $$X_\ell + Z_\ell - Z_{\ell-1} = s\zeta_\ell.$$
   (c) On pose $S'_n = \sum\limits_{\ell=1}^{n} s\zeta_\ell$. Étudier la convergence en loi de $(\frac{1}{\sqrt{n}} S'_n)_{n\geq 1}$, lorsque n tend vers l'infini.
   (d) Montrer que la suite $(\frac{S_n}{\sqrt{n}})_{n\geq 1}$ converge vers une loi normale centrée dont on précisera la variance σ^2. On pourra utiliser, sans qu'il soit demandé de démonstration, que les variables aléatoires Z_n, $n \geq 1$, ont même loi.

FIN