Nancy-Université
Université Henri Poincaré

Probabilités et Modélisation Stochastique

correction de l'examen du 17 juin 2009

Partie I

1. $A_2 = \{(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \in \{0,1\}^2 : \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \leq 1\}$, donc $A_2 = \{(0,0); (1,0); (0,1)\}$. Ainsi $G_2 = \max(0.X_1 + 0.X_2, 1.X_1 + 0.X_2, 0.X_1 + 1.X_2) = \max(0, X_1, X_2) = \max(X_1, X_2)$ car X_1 et X_2 sont à valeurs positives.
   Par suite, G_2 est aussi à valeurs positives. Soit $t \geq 0$.
   $$\begin{aligned} \mathbb{P}(G_2 \leq t) &= \mathbb{P}(\max(X_1, X_2) \leq t) \\ &= \mathbb{P}(X_1 \leq t, X_2 \leq t) \\ &= \mathbb{P}(X_1 \leq t)\mathbb{P}(X_2 \leq t) \quad \text{par indépendance} \\ &= (1 - e^{-t})(1 - e^{-t}) \\ &= 1 - 2e^{-t} + e^{-2t} \end{aligned}$$
   Et bien sûr $\mathbb{P}(G_2 \leq t) = 0$ pour $t < 0$ puisque G_2 est à valeurs positives.
   Posons $f(x) = 2(e^{-x} - e^{-2x})\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$.
   Pour $t \leq 0$, on a $\int_{]-\infty,t]} f(x)\ d\lambda(x) = \int_{]-\infty,t]} 0\ d\lambda(x) = 0$.
   Pour $t > 0$, on a
   $$\begin{aligned} \int_{]-\infty,t]} f(x)\ d\lambda(x) &= \int_{]-\infty,0]} f(x)\ d\lambda(x) + \int_{[0,t]} f(x)\ d\lambda(x) \\ &= 0 + \int_0^t 2(e^{-x} - e^{-2x})\ dx = 1 - 2e^{-t} + e^{-2t} \end{aligned}$$
   Finalement, pour tout t réel, $\int_{]-\infty,t]} f(x)\ d\lambda(x) = P(G_2 \leq t)$, ce qui montre que f est une densité de la loi de G_2 par rapport à la mesure de Lebesgue.
2. On suppose ici que la suite $(V_i)_{i\geq 1}$ est constamment égale à 0 et que les $(X_n)_{n\geq 1}$ sont des variables aléatoires indépendantes suivant la loi
   $$\frac{3}{4}\delta_0 + \frac{1}{8}\delta_1 + \frac{1}{8}\delta_2.$$
   (a) Comme les V_i sont identiquement nuls, on a $A_n = \{0,1\}^n$. Pour tout $\varepsilon \in \{0,1\}^n$, on a $\varepsilon_i V_i \leq V_i$, donc
   $$\sum_{i=1}^n \varepsilon_i V_i \leq \sum_{i=1}^n V_i,$$
   avec égalité pour $\varepsilon = (1, \dots, 1)$. Ainsi $G_n = X_1 + \cdots + X_n$. G_n est une somme d'entiers naturels donc c'est un entier naturel : $(G_n)_{n\geq 0}$ est à valeurs dans $\mathbb{N}$. Si on pose $G_0 = 0$, on a la récurrence $G_{n+1} = G_n + X_{n+1} = h(G_n, X_{n+1})$ avec $h(x,y) = x + y$. Comme $(X_n)_{n\geq 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées indépendantes de G_0 (une constante), $(G_n)_{n\geq 0}$ est bien une chaîne de Markov. Par construction, on ne peut passer de i à j que si $j \geq i$, donc la chaîne n'est pas irréductible (par exemple on ne peut pas passer de 2 à 1)

(b) Comme $G_{n+1} = G_n + X_{n+1}$, $W_{n+1} = G_{n+1} - (n+1) = (G_n - n) + (X_{n+1} - 1) = W_n + (X_{n+1} - 1) = f(W_n, X_n)$, avec $f(x,y) = x + y - 1$, donc les mêmes arguments que précédemment montrent que (W_n) est une chaîne de Markov.

On a $W_{n+1} = W_n + (X_{n+1} - 1)$. Or $X_{n+1} - 1$ prend avec probabilités positives les valeurs $-1, 0, 1$: ainsi, pour tout $x \in \mathbb{Z}$, on peut aller de x à $x+1$ en faisant un pas de $+1$ et on peut aussi aller de $x+1$ à x avec un pas de -1 : ainsi pour tout x, x et $x+1$ communiquent. Finalement, tous les éléments de $\mathbb{Z}$ communiquent. On peut aller de 0 à 0 en 1 coup $p_{0,0} = \mathbb{P}(X_1 - 1 = 0) = 1/8 > 0$: ainsi le pgcd des n tels qu'on peut aller de 0 à 0 en n coups est 1, donc 0 est apériodique, et comme la chaîne est irréductible, la chaîne est apériodique.

(c)

$$\mathbb{E}[2^{W_n}] = \mathbb{E}[2^{G_n - n}] = 2^{-n}\mathbb{E}[2^{G_n}] = 2^{-n}\mathbb{E}[\prod_{i=1}^{n} 2^{X_1}] = 2^{-n}\prod_{i=1}^{n}\mathbb{E}[2_i^X]$$

par indépendance, mais comme les variables sont identiquement distribuées, on a

$$\mathbb{E}[2^{W_n}] = 2^{-n}(\mathbb{E}[2^{X_1}])^n.$$

$$\mathbb{E}[2^{X_1}] = \frac{3}{4}2^0 + \frac{1}{8}2^1 + \frac{1}{8}2^2 = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} + \frac{2}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2},$$

d'où

$$\mathbb{E}[2^{W_n}] = 2^{-n}(3/2)^n = (3/4)^n.$$

$\{W_n = 0\} = \{2^{W_n} = 1\} \subset \{2^{W_n} \geq 1\}$, donc $\mathbb{P}(W_n = 0) \leq \mathbb{P}(2^{W_n} \geq 1) \leq \frac{\mathbb{E}[(2^{W_n}]}{1}$, d'après l'inégalité de Markov. Donc

$$\sum_{n=1}^{+\infty} p_{0,0}^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(2^{W_n} \geq 1) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} (3/4)^n < +\infty,$$

ce qui montre que l'état 0 est transitoire : la chaîne n'est donc pas récurrente.

Partie II

1. On sait que pour tout couple (U,V) de vecteurs aléatoires indépendants et pour toute fonction h telle que $h(U,V)$ soit intégrable, on a $\mathbb{E}[h(U,V)|U] = H(U)$ avec $H(u) = \mathbb{E}[h(u,V)]$.
On prend ici $U = (X,Y)$, $V = Z$ et $h((x,y),z) = \phi(x,z)$: il vient $\mathbb{E}[\phi(X,Z)|\sigma(X,Y)] = \mathbb{E}[h(U,V)|U] = H(U) = H((X,Y))$, avec $H((x,y)) = \mathbb{E}[h((x,y),V)] = \mathbb{E}[\phi(x,Z)]$, ce qui donne bien l'identité $\mathbb{E}[\phi(X,Z)|\sigma(X,Y)] = \psi(X)$.
La tribu $\sigma(X)$ est une sous-tribu de $\sigma(X,Y)$, donc

$$\mathbb{E}[\phi(X,Z)|X] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[\phi(X,Z)|\sigma(X,Y)]|X] = \mathbb{E}[\psi(X)|X] = \psi(X),$$

car $\psi(X)$ est $\sigma(X)$-mesurable. On a donc finalement $\mathbb{E}[\phi(X,Z)|\sigma(X,Y)] = \psi(X) = \mathbb{E}[\phi(X,Z)|X]$.
2. Pour tout $\varepsilon \in A_n$, on a

$$0 \leq \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i V_i \leq Kn,$$

d'où $0 \leq G_n \leq Kn$, ce qui assure l'intégrabilité de G_n.

3. $\mathcal{F}_0$ est la tribu triviale qui est contenue dans toute tribu. Par construction, la suite $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 1}$ est croissante. La suite $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ forme donc bien une filtration. Soit k un entier naturel : $\mathbb{E}[Y_{k+1}|\mathcal{F}_k] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[G_n|\mathcal{F}_{k+1}]|\mathcal{F}_k] = \mathbb{E}[G_n|\mathcal{F}_k]$ car $\mathcal{F}_k \subset \mathcal{F}_{k+1}$. On a donc bien $\mathbb{E}[Y_{k+1}|\mathcal{F}_k] = Y_k$, ce qui montre que $(Y_k)_{k\geq 0}$ est une martingale.
4. Comme $A_n^i \subset A_n$, l'inégalité $G_n^i \leq G_n$ est immédiate. Soit $\varepsilon \in A_n$ tel que
$$G_n = \sum_{j=1}^n \varepsilon_j X_j.$$
Posons $\varepsilon'_j = \varepsilon_j$ pour $j \neq i$ et $\varepsilon'_i = 0$. Ainsi $0 \leq \varepsilon'_j \leq \varepsilon_j$ pour tout i : On a
$$\sum_{j=1}^n \varepsilon'_j V_j \leq \sum_{j=1}^n \varepsilon_j V_j \leq n,$$
donc $\varepsilon' \in A_n$. Comme de plus $\varepsilon'_i = 0$, on a $\varepsilon' \in A_n^i$, d'où
$$G_n^i \geq \sum_{j=1}^n \varepsilon'_j X_j = \left(\sum_{j=1}^n \varepsilon_j X_j\right) - \varepsilon_i X_i = G_n - \varepsilon_i X_i \geq G_n - K,$$
ce qui nous donne la deuxième inégalité.
5. Posons $X = (X_1, V_1, X_2, V_2, \dots, X_{i-1}, V_{i-1})$, $Y = (X_i, V_i)$ et $Z = (X_{i+1}, V_{i+1}, X_{i+2}, V_{i+2}, \dots, X_n, V_n)$. On a $G_n^i = \phi(X, Z)$, avec
$$\begin{aligned} & \phi((x_1, v_1, \dots, x_{i-1}, v_{i-1}), (x_{i+1}, v_{i+1}, x_{i+2}, v_{i+2}, \dots, x_n, v_n)) \\ = & \max_{\varepsilon \in A_n} \left(\sum_{j=1}^{i-1} \varepsilon_j x_j + \sum_{j=i+1}^n \varepsilon_j x_j\right) \mathbb{1}_{]-\infty, n]} \left(\sum_{j=1}^{i-1} \varepsilon_j v_j + \sum_{j=i+1}^n \varepsilon_j v_j\right) \end{aligned}$$
D'après la question 1., on a $\mathbb{E}[\phi(X,Z)|\sigma(X,Y)] = \mathbb{E}[\phi(X,Z)|X]$, soit
$$\mathbb{E}[G_i^n|\mathcal{F}_i] = \mathbb{E}[G_i^n|\mathcal{F}_{i-1}].$$
6. Soit $i \in \{1, \dots, n\}$. On a $G_n^i \leq G_n \leq G_n^i + K$. En prenant l'espérance conditionnelle sachant $\mathcal{F}_i$, on a
$$\mathbb{E}[G_n^i|\mathcal{F}_i] \leq Y_i \leq \mathbb{E}[G_n^i|\mathcal{F}_i] + K.$$
En prenant l'espérance conditionnelle sachant $\mathcal{F}_{i-1}$, on a
$$\mathbb{E}[G_n^i|\mathcal{F}_{i-1}] \leq Y_{i-1} \leq \mathbb{E}[G_n^i|\mathcal{F}_{i-1}] + K,$$
soit
$$-\mathbb{E}[G_n^i|\mathcal{F}_{i-1}] - K \leq -Y_{i-1} \leq -\mathbb{E}[G_n^i|\mathcal{F}_{i-1}],$$
ce qui, compte tenu de l'égalité démontrée en 5. donne en additionnant les deux inégalités :
$$-K \leq Y_i - Y_{i-1} \leq K.$$
L'inégalité est encore vérifiée pour $i > n$ puisque Y_i est constamment égale à G_n pour $i \geq n$.
7. Les hypothèses de l'inégalité de Hoeffding sont clairement vérifiées, avec $k_i = K$ pour tout i. Comme $\mathcal{F}_0$ est la tribu triviale, on a $Y_0 = \mathbb{E}[G_n|\mathcal{F}_0] = \mathbb{E}[G_n]$, d'où le résultat
$$\mathbb{P}(|G_n - \mathbb{E}G_n| \geq x) \leq 2\exp(-\frac{x^2}{2nK^2}).$$

Partie III

1. Posons $Z_n = \frac{G_n - \mathbb{E}G_n}{n}$. Pour montrer que Z_n tend presque sûrement vers 0, il faut et il suffit que pour tout $\varepsilon > 0$. $\mathbb{P}(\overline{\lim_{n\to+\infty}}\{|Z_n| > \varepsilon\}) = 0$. D'après le premier lemme de Borel-Cantelli, il suffit de montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, la série de terme général $\mathbb{P}(|Z_n| > \varepsilon)$ converge. Cependant
$$\mathbb{P}(|Z_n| > \varepsilon) = \mathbb{P}(|G_n - \mathbb{E}G_n| \geq n\varepsilon) \leq 2\exp(-\frac{(n\varepsilon)^2}{2nK^2}) = 2\exp(-\frac{n\varepsilon^2}{2K^2}),$$
d'où $\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(|Z_n| > \varepsilon) \leq \frac{2}{1-\exp(-\frac{\varepsilon^2}{2K^2})} < +\infty$, ce qui donne bien le résultat voulu.
2. On a vu que $G_n \leq Kn$, donc $\mathbb{E}[G_n] \leq Kn$, d'où $u_n/n \leq K$ et $\gamma = \sup_{n\geq 1} \frac{u_n}{n} \leq K < +\infty$.
3. (a) Soit $\varepsilon \in A_n$ et $\varepsilon' \in A_{n,p}$ tels que
$$G_n = \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j X_j \text{ et } G_{n,p} = \sum_{j=1}^{p} \varepsilon'_j X_{n+j}.$$
Par définition de A_n et $A_{n,p}$,
$$\sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j V_j + \sum_{j=1}^{p} \varepsilon'_j V_{n+j} \leq n + p,$$
donc la suite concaténée $(\varepsilon, \varepsilon')$ est dans A_{n+p}, d'où
$$G_{n+p} \geq \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j X_j + \sum_{j=1}^{p} \varepsilon'_j X_{n+j} = G_n + G_{n,p}.$$
(b) Si on pose
$$\psi_p(x_1, v_1, \ldots, x_p, v_p) \quad = \quad \max_{\varepsilon\in A_n} \left(\sum_{j=1}^{p} \varepsilon_j x_j\right) 1\!\!1_{]-\infty,n]}\left(\sum_{j=1}^{p} \varepsilon_j v_j\right)$$
On a $G_p = \psi_p(X_1, V_1, \ldots, X_p, V_p)$ et $G_{n,p} = \psi_p(X_{n+1}, V_{n+1}, \ldots, X_{n+p}, V_{n+p})$ Cependant $(X_1, V_1, \ldots, X_p, V_p)$ et $(X_{n+1}, V_{n+1}, \ldots, X_{n+p}, V_{n+p})$ suivent tous deux la loi $\mathbb{P}_{(X_1,V_1)}^{\otimes p}$, donc G_p et $G_{n,p}$ suivent toutes deux la loi image de $\mathbb{P}_{(X_1,V_1)}^{\otimes p}$ par ψ_p.
(c) On sait que $G_{n+p} \leq G_n + G_{n,p}$. $G_{n,p}$ est intégrable car il a la même loi que G_p : on peut donc prendre l'espérance : $u_{n+p} = \mathbb{E}[G_{n+p}] \leq \mathbb{E}[G_n] + \mathbb{E}[G_{n,p}] = \mathbb{E}[G_n] + \mathbb{E}[G_p] = u_n + u_p$; en effet comme $G_{n,p}$ et G_p ont même loi, ils ont la même espérance.
4. Comme $\gamma < +\infty$, l'existence de n_0 est une conséquence immédiate de la définition de la borne supérieure. Comme $u_{n_0(i+1)} = u_{n_0 i + n_0} \geq u_{n_0 i} + u_{n_0}$, on montre aisément par récurrence que $u_{n_0 k} \geq k u_{n_0}$ pour tout k, puis $u_{kn_0+r} \geq u_{kn_0} + u_r \geq k u_{n_0} + u_r$, soit
$$\frac{u_{kn_0+r}}{kn_0 + r} \geq \frac{k}{kn_0 + r} u_{n_0} + \frac{u_r}{kn_0 + r},$$
d'où en faisant tendre k vers $+\infty$:
$$\underline{\lim}_{k\to+\infty} \frac{u_{kn_0+r}}{kn_0 + r} \geq u_{n_0} \geq \gamma - \varepsilon.$$

Mais

$$\underline{\lim}_{n\to+\infty} \frac{u_n}{n} = \inf_{0\le r<n_0} \underline{\lim}_{k\to+\infty} \frac{u_{kn_0+r}}{kn_0+r},$$

d'où $\underline{\lim}_{n\to+\infty} \frac{u_n}{n} \ge \gamma - \varepsilon$ En faisant tendre ε vers 0, on a $\underline{\lim}_{n\to+\infty} \frac{u_n}{n} \ge \gamma$.

5. On a

$$\gamma = \sup_{n\to+\infty} \frac{u_n}{n} \ge \overline{\lim}_{n\to+\infty} \frac{u_n}{n} \ge \underline{\lim}_{n\to+\infty} \frac{u_n}{n} \ge \gamma.$$

Ainsi la limite inférieure et la limite supérieure de u_n/n coïncident avec γ, qui est donc la limite de u_n/n lorsque n tend vers l'infini.

6. u_n/n converge (presque sûrement !) vers γ et $G_n/n - u_n/n$ tend presque sûrement vers 0, donc comme la convergence presque sûre est compatible avec l'addition, G_n/n converge presque sûrement vers γ.

FIN