Université de Nancy I **Master 1**

Nancy-Université
Université Henri Poincaré

Probabilités et Modélisation Stochastique

Examen du 17 juin 2009

durée 3h

Les documents papier (livres, polycopiés, notes manuscrites,...) sont autorisés.
Les calculatrices respectant la réglementation (dimensions inférieures à 15 cm par 20 cm, alimentation autonome, pas d'imprimante) sont autorisées.
Tout instrument de communication, qu'il en soit fait ou non usage, est interdit.

Toutes les variables aléatoires considérées dans ce problème sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

On dispose d'une collection d'objets numérotés de 1 à n, de valeurs respectives $X_1, \dots, X_n$ et de volumes respectifs $V_1, \dots, V_n$.

On veut remplir un sac à dos de contenance maximale n avec certains de ces objets, de manière à maximiser le gain total. Ainsi, le gain maximal est

$$G_n = \max_{\varepsilon \in A_n} \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i X_i,$$

avec

$$A_n = \{\varepsilon \in \{0,1\}^n : \quad \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i V_i \leq n\}.$$

On suppose que les variables $V_1, \dots, V_n, X_1, \dots, X_n$ sont des variables aléatoires positives indépendantes et qu'il existe une constante K telle que pour tout i $X_i \leq K$ presque sûrement.

Partie I

Cette partie est consacrée à l'étude de quelques cas particuliers.

1. On suppose ici que $n = 2$ et que les variables V_1 et V_2 sont dégénérées avec $V_1 = V_2 = 2$. Montrer que $G_2 = \max(X_1, X_2)$. Dans le cas où X_1 et X_2 suivent la loi exponentielle de paramètre 1, déterminer la fonction de répartition de G_2, puis montrer que la loi de G_2 admet une densité par rapport à la mesure de Lebesgue.
2. On suppose ici que la suite $(V_i)_{i\geq 1}$ est constamment égale à 0 et que les $(X_n)_{n\geq 1}$ sont des variables aléatoires indépendantes suivant la loi

$$\frac{3}{4}\delta_0 + \frac{1}{8}\delta_1 + \frac{1}{8}\delta_2.$$

   (a) Montrer que $G_n = X_1 + \dots + X_n$. Montrer que $(G_n)_{n\geq 1}$ est une chaîne de Markov à valeurs dans $\mathbb{N}$. La chaîne $(G_n)_{n\geq 1}$ est-elle irréductible ?
   (b) On pose $W_n = G_n - n$. Montrer que $(W_n)_{n\geq 1}$ est une chaîne de Markov à valeurs dans $\mathbb{Z}$. Est-elle irréductible, apériodique ?
   (c) Montrer que $\mathbb{E}[2^{W_n}] = (3/4)^n$. Montrer que $\mathbb{P}(W_n = 0) \leq \mathbb{P}(2^{W_n} \geq 1)$. La chaîne $(W_n)_{n\geq 1}$ est-elle récurrente ?

Partie II

Dans toute cette partie, on fixe un entier naturel non nul n et on étudie les propriétés de concentration de G_n.

Pour $1 \leq k \leq n$, on pose $\mathcal{F}_k = \sigma(X_1, \ldots, X_k, V_1, \ldots, V_k)$. On pose également $\mathcal{F}_k = \mathcal{F}_n$ pour $k > n$ et $\mathcal{F}_0 = \{\varnothing, \Omega\}$.

On rappelle l'inégalité de Hoeffding, que l'on a démontrée dans le devoir n° 1 de cette année, et que l'on pourra utiliser sans démonstation :

Théorème 1 *Soit $(Y_n)_{n\geq 0}$ une martingale. On suppose qu'il existe une suite k_n telle que pour tout n, $|Y_n| \leq k_n$. Alors pour tout entier naturel n et pour tout $x > 0$.*

$$\mathbb{P}(|Y_n - Y_0| \geq x) \leq 2\exp\left(-\frac{x^2}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} k_i^2\right)^{-1}\right).$$

1. Soient X, Y, Z trois vecteurs aléatoires indépendants. Soit ϕ une fonction telle que $\phi(X, Z)$ soit intégrable. Montrer que
$$\mathbb{E}[\phi(X,Z)|\sigma(X,Y)] = \psi(X),$$
avec $\psi(x) = \mathbb{E}[\phi(x, Z)]$. (On pourra remarquer que (X, Y) est indépendant de Z et on citera précisément le ou les théorèmes employés). En déduire que $\mathbb{E}[\phi(X,Z)|\sigma(X,Y)] = \mathbb{E}[\phi(X,Z)|X]$.
2. Montrer que G_n est intégrable.
3. Pour tout entier naturel k, on pose $Y_k = \mathbb{E}[G_n|\mathcal{F}_k]$. Montrer que $(Y_k)_{k\geq 0}$ est une martingale.
4. Pour $i \in \{1, \ldots, n\}$, on pose $A_n^i = \{\varepsilon \in A_n; \varepsilon_i = 0\}$ et
$$G_n^i = \max_{\varepsilon \in A_n^i} \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j X_j.$$
Montrer que $G_n^i \leq G_n \leq G_n^i + K$.
5. Montrer que $\mathbb{E}[G_n^i|\mathcal{F}_i] = \mathbb{E}[G_n^i|\mathcal{F}_{i-1}]$.
6. En déduire que $|Y_i - Y_{i-1}| \leq K$ pour $i \in \{1, \ldots, n\}$. Que peut on dire pour $i > n$?
7. À l'aide de l'inégalité de Hoeffding, montrer que
$$\mathbb{P}(|G_n - \mathbb{E}G_n| \geq x) \leq 2\exp\left(-\frac{x^2}{2nK^2}\right).$$

Partie III

On suppose maintenant de plus que les suites $(X_n)_{n\geq 1}$ et $(V_n)_{n\geq 1}$ sont toutes deux respectivement identiquement distribuées. On s'intéresse au comportement asymptotique de G_n.

1. À l'aide du lemme de Borel-Cantelli, montrer que $\frac{G_n - \mathbb{E}G_n}{n}$ tend presque sûrement vers 0.
2. On pose $u_n = \mathbb{E}[G_n]$. Montrer que $\gamma = \sup_{n\geq 1} \frac{u_n}{n} < +\infty$.
3. Soient n et p deux entiers naturels non nuls. On pose
$$G_{n,p} = \max_{\varepsilon \in A_{n,p}} \sum_{i=1}^{p} \varepsilon_i X_{n+i},$$
avec
$$A_{n,p} = \{\varepsilon \in \{0,1\}^p : \sum_{i=1}^{p} \varepsilon_i V_{n+i} \leq p\}.$$

(a) Montrer que $G_{n+p} \geq G_n + G_{n,p}$.

(b) Montrer que G_p et $G_{n,p}$ ont même loi.

(c) Montrer que $u_{n+p} \geq u_n + u_p$.

4. Soit $\varepsilon > 0$. Justifier l'existence d'un entier naturel non nul n_0 tel que $\frac{u_{n_0}}{n_0} \geq \gamma - \varepsilon$. Montrer que pour tout $r \in \{0, \ldots, n_0 - 1\}$, on a

$$\underline{\lim}_{k \to +\infty} \frac{u_{kn_0+r}}{kn_0 + r} \geq \gamma - \varepsilon.$$

En déduire que $\underline{\lim}_{n \to +\infty} \frac{u_n}{n} \geq \gamma - \varepsilon$, puis que $\underline{\lim}_{n \to +\infty} \frac{u_n}{n} \geq \gamma$.

5. Montrer que u_n/n tend vers γ lorsque n tend vers l'infini.

6. Montrer que G_n/n converge presque sûrement vers une limite que l'on précisera.

FIN