Université de Nancy I **Master 1**

Nancy-Université
Université Henri Poincaré

Probabilités et Modélisation Stochastique

Corrigé de l'examen du 22 janvier 2009

(deuxième session, durée 3h)

– I –

1. Tout d'abord, remarquons que Y_n est une variable aléatoire bornée (elle est bornée par $\frac{1}{(\cos\alpha)^n}$. Ainsi les variables considérées ont bien intégrables et admettent bien des espérances conditionnelles. Pour simplifier les écritures, posons $Z_n = \alpha(S_n - \frac{c-d}{2}))$: on a

   $\cos(Z_{n+1}) = \cos(Z_n + \alpha X_{n+1}) = \cos(Z_n)\cos(\alpha X_{n+1}) - \sin(Z_n)\sin(\alpha X_{n+1})$.

   Z_n est $\mathcal{F}_n$-mesurable, donc

   $$\mathbb{E}[\cos(Z_{n+1})|\mathcal{F}_n] = \cos(Z_n)\mathbb{E}[\cos(\alpha X_{n+1})|\mathcal{F}_n] - \sin(Z_n)\mathbb{E}[\sin(\alpha X_{n+1})|\mathcal{F}_n].$$

   Cependant $\cos(\alpha X_{n+1})$ est $\sin(\alpha X_{n+1})$ sont indépendants de $\mathcal{F}_n$, donc $\mathbb{E}[\cos(\alpha X_{n+1})|\mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[\cos(\alpha X_{n+1})] = \cos\alpha$, tandis que $\mathbb{E}[\sin(\alpha X_{n+1})|\mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[\sin(\alpha X_{n+1})] = 0$.
   Ainsi

   $$\mathbb{E}[\cos(Z_{n+1})|\mathcal{F}_n] = \cos\alpha\cos(Z_n),$$

   d'où il vient que

   $$\mathbb{E}[Y_{n+1}|\mathcal{F}_n] = Y_n,$$

   ce qui montre bien que Y_n estd'où il

   $$S_{n+1}^2 = (S_n + X_{n+1})^2 = S_n^2 + X_{n+1}^2 + 2S_nX_{n+1} = S_n^2 + 1 + 2S_nX_{n+1},$$

   car $X_{n+1} \in \{-1, 1\}$. Par suite

   $$\forall n \ge 0 \quad Y_{n+1} = Y_n + 2S_nX_{n+1}.$$

   S_n est une martingale adaptée à la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\ge0}$.
2. T est le temps d'entrée de la suite $(S_n)_{n\ge0}$ dans le borélien $]-\infty-d]\cup[c,+\infty[$. Comme $(S_n)_{n\ge0}$ est adaptée à la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\ge0}$ (on a vu que pour tout n, S_n est $\mathcal{F}_n$-mesurable), il s'ensuit que T est un temps d'arrêt adapté à la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\ge0}$. Mais $(Y_n)_{n\ge0}$ est une martingale adaptée à la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\ge0}$. Or, le théorème d'arrêt dit que lorsqu'on arrête une martingale adaptée à une filtration par un temps d'arrêt adapté à la même filtration, le processus obtenu est encore une martingale adaptée à cette filtration. Ainsi $(Y_{T\wedge n})_{n\ge0}$ est une martingale adaptée à la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\ge0}$.
   On va montrer que $S_{T\wedge n} \in \{-c; -c+1; \dots d-1; d\}$. On raisonne ici ω par ω, même si la dépendance en ω est laissée implicite pour ne pas surcharger les écritures.
   Par définition de T, on sait que $S_n \notin]-\infty - d] \cup [c, +\infty[$ pour $n < T$. Si $T = +\infty$, alors on a pour tout n, $n < T$ et $-c < S_{T\wedge n} < -d$. Supposons donc T fini. Comme $(|S_n|)$ est à valeurs entières, on a, pour $n < T$, $-c < S_{T\wedge n} < d$. Comme $S_T = S_{T-1} + X_T$, on a alors $S_T = S_{T-1} + X_T \le$

$d-1+1=d$, tandis que $S_T = S_{T-1}+X_T \geq -c+1-1=-c$. Finalement, $\{-c;-c+1;\dots d-1;d\}$ pour tout $n \leq T$. Cependant, $T\wedge n \leq T$, donc on a bien $S_{T\wedge n}\{-c;-c+1;\dots d-1;d\}$, d'où

$$-\frac{\pi}{2} < -\alpha\frac{c+d}{2} \leq \alpha(S_{T\wedge n}-\frac{c-d}{2}) \leq \alpha\frac{c+d}{2} < \frac{\pi}{2}$$

En utilisant les variations de la fonction cosinus, on obtient

$$\cos(\alpha(\alpha(S_n-\frac{c-d}{2}))) \geq \cos\alpha\frac{c+d}{2} \tag{1}$$

ce qui entraîne $Y_{T\wedge n} \geq 0$.

3. $(Y_{T\wedge n})$ est une martingale, donc en particulier son espérance est constante : pour tout n, on a

$$\mathbb{E}Y_{T\wedge n} = \mathbb{E}Y_{T\wedge 0} = \mathbb{E}Y_0 = \mathbb{E}0 = \cos(\alpha\frac{c-d}{2}).$$

Cependant, d'après 1, on a $\cos\alpha\frac{c+d}{2}(\cos\alpha)^{-T\wedge n} \leq Y_{T\wedge n}$, d'où

$$\cos\alpha\frac{c+d}{2}(\cos\alpha)^{-T\wedge n} \leq \mathbb{E}Y_{T\wedge n} = \cos(\alpha\frac{c-d}{2}),$$

soit

$$(\cos\alpha)^{-T\wedge n} \leq \frac{\cos(\alpha\frac{c-d}{2})}{\cos(\alpha\frac{c+d}{2})}.$$

4.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(T\geq n) &= \mathbb{P}(T\wedge n \geq n)\\
&\leq \mathbb{P}\left((\cos\alpha)^{-T\wedge n} \leq (\cos\alpha)^{-n}\right)\\
&\leq \frac{\mathbb{E}(\cos\alpha)^{-T\wedge n}}{(\cos\alpha)^{-n}}\\
&\leq \frac{\cos(\alpha\frac{c-d}{2})}{\cos(\alpha\frac{c+d}{2})}(\cos\alpha)^n
\end{aligned}$$

Ainsi, d'après le théorème de continuité séquentielle décroissante

$$\mathbb{P}(T=+\infty) = \lim_{n\to+\infty}\mathbb{P}(T\geq n) = 0,$$

donc T est fini presque sûrement.

5. Comme T est presque sûrement fini, la suite $(\cos\alpha)^{-T\wedge n}$ est positive,croissante et converge presque sûrement vers $(\cos\alpha)^{-T}$. D'après le théorème de convergence monotone, on a donc

$$\mathbb{E}(\cos\alpha)^{-T} = \lim_{n\to+\infty}\mathbb{E}(\cos\alpha)^{-T\wedge n}$$

cependant la suite $(\mathbb{E}(\cos\alpha)^{-T\wedge n})_{n\geq 0}$ est bornée par $\frac{\cos(\alpha\frac{c-d}{2})}{\cos(\alpha\frac{c+d}{2})}$, donc à la limite on a

$$\mathbb{E}(\cos\alpha)^{-T} \leq \frac{\cos(\alpha\frac{c-d}{2})}{\cos(\alpha\frac{c+d}{2})} < +\infty.$$

6. Comme T est fini presque sûrement, $X_{n\wedge T}$ converge presque sûrement presque X_T. Bien évidemment, $\cos\left(\alpha(X_{n\wedge T}-\frac{c-d}{2})\right)$ converge donc presque sûrement vers $\cos\left(\alpha(X_T-\frac{c-d}{2})\right)$ On a déjà vu que $X_{n\wedge T}\in\{-c,\dots,d\}$ pour tout n, donc $X_T\in\{-c,\dots,d\}$. Mais par définition de T, $X_T\leq -c$ ou $X_T\geq d$, donc finalement $X_T\in\{-c;d\}$, d'où $\alpha(X_T-\frac{c-d}{2})\in\{-\alpha\frac{c+d}{2};\alpha\frac{c+d}{2}\}$. Dans les deux cas, $\cos\alpha(X_T-\frac{c-d}{2}) = \cos(\alpha\frac{c+d}{2})$. Ainsi $\cos\left(\alpha(X_{n\wedge T}-\frac{c-d}{2})\right)$ converge presque sûrement vers $\cos(\alpha\frac{c+d}{2})$.

7. En mettant ensemble les résultats des dernières questions, on voit que $Y_{n\wedge T}$ converge presque sûrement vers $(\cos\alpha)^{-T}\cos(\alpha\frac{c+d}{2})$. Cependant on a pour tout n
$$|Y_{n\wedge T}| \le (\cos\alpha)^{-(n\wedge T)},$$
qui est une fonction intégrable. D'après le théorème de convergence dominée, on a donc que
$$\mathbb{E}(\cos\alpha)^{-T}\cos(\alpha\frac{c+d}{2}) = \lim_{n\to+\infty}\mathbb{E}Y_{n\wedge T} = \mathbb{E}Y_0 = \cos(\alpha\frac{c-d}{2}),$$
soit
$$\mathbb{E}(\cos\alpha)^{-T} = \frac{\cos(\alpha\frac{c-d}{2})}{\cos(\alpha\frac{c+d}{2})}.$$

8. Si $c+d\ge 3$, on a $c>1$ ou $d>1$:
   - si $c>1$, on a
   $$\{T=2n+c\}\supset \cap_{i=1}^{2n}\{X_i=(-1)^i\}\cap\cap_{i=2n+1}^{2n+c}\{X_i=1\},$$
   d'où
   $$\mathbb{P}(T=2n+c)\ge\mathbb{P}(\cap_{i=1}^{2n}\{X_i=(-1)^i\}\cap\cap_{i=2n+1}^{2n+c}\{X_i=1\}) = (-1)^{2n+c}.$$
   - sinon, $d>1$ et on a
   $$\{T=2n+c\}\supset \cap_{i=1}^{2n}\{X_i=(-1)^{i+1}\}\cap\cap_{i=2n+1}^{2n+c}\{X_i=1\},$$
   d'où encore
   $$\mathbb{P}(T=2n+c)\ge\mathbb{P}(\cap_{i=1}^{2n}\{X_i=(-1)^{i+1}\}\cap\cap_{i=2n+1}^{2n+c}\{X_i=1\}) = (-1)^{2n+c}.$$

9. D'après le théorème de transfert
$$\mathbb{E}2^T = \sum_{k=0}^{+\infty}2^k\mathbb{P}(T=k),$$
donc pour que 2^T soit intégrable, il est nécessaire d'avoir $\lim_{k\to+\infty}2^k\mathbb{P}(T=k)=0$. Cependant, la question précédente montre que $\limsup_{n\to+\infty}2^n\mathbb{P}(T=n)\ge 1$. Comme $\alpha\in[\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}[$, $(\cos\alpha)^{-1}\ge 2$, d'où
$$\mathbb{E}(\cos\alpha)^{-T}\ge\mathbb{E}2^T=+\infty.$$

– II –

1. Comme les événements $(\{X_{n+1}=j\})_{j\ge 0}$ forment une partition de Ω, on a
$$\begin{aligned}
f(X_{n+1}) &= f(X_{n+1})1\\
&= f(X_{n+1})\sum_{j=0}^{+\infty}1\!\!1_{\{X_{n+1}=j\}}\\
&= \sum_{j=0}^{+\infty}1\!\!1_{\{X_{n+1}=j\}}f(X_{n+1})\\
&= \sum_{j=0}^{+\infty}1\!\!1_{\{X_{n+1}=j\}}f(j)
\end{aligned}$$

Remarquons qu'à n fixé, X_{n+1} ne peut prendre qu'un nombre fini de valeurs, toutes comprises entre 0 et $x+(n+1)$). Ainsi la somme considérée ici ne comporte en réalité qu'un nombre fini de termes :

$$f(X_{n+1}) = \sum_{j=0}^{x+1} 1\!\!1_{\{X_{n+1}=j\}} f(j) \quad \mathbb{P}^x\text{p.s.}$$

D'où

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[f(X_{n+1})|\mathcal{F}_n] &= \sum_{j=0}^{x+1} \mathbb{E}^x[1\!\!1_{\{X_{n+1}=j\}}|\mathcal{F}_n]f(j) \\
&= \sum_{j=0}^{x+1} \mathbb{P}^x[X_{n+1}=j|\mathcal{F}_n]f(j) \\
&= \sum_{j=0}^{x+1} p_{X_n,j} f(j)
\end{aligned}$$

Comme $X_n \le x+n$, on a $p_{X_n,j}=0$ pour $j \ge x+2$: ainsi on peut écrire

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[f(X_{n+1})|\mathcal{F}_n] &= \sum_{j=0}^{+\infty} p_{X_n,j} f(j) \\
&= \Psi_f(X_n),
\end{aligned}$$

ce qui montre bien le résultat voulu.

2. En particulier, en prenant $f(x) = 1/(1+x)$, on a $\Psi_f(0) = p_{0,0}f(0) = 1.f(0) = f(0)$ et pour $j \ge 1$

$$\begin{aligned}
\Psi_f(j) &= \frac{j+2}{2j+2} f(j+1) + \frac{j}{2j+2} f(j-1) \\
&= \frac{j+2}{2j+2}\frac{1}{j+2} + \frac{j}{2j+2}\frac{1}{j} \\
&= \frac{1}{j+1}
\end{aligned}$$

Ainsi, $\Psi_f = f$: on en déduit avec la question précédente que

$$\mathbb{E}[f(X_{n+1})|\mathcal{F}_n] = \Psi_f(X_n) = f(X_n),$$

ce qui montre que la suite $(f(X_n))_{n\ge 0}$, soit $(Y_n)_{n\ge 0}$, est une martingale. Cette martingale est adaptée à la filtration $\mathcal{F}_n$, puisque Y_n est une espérance sachant $\mathcal{F}_n$. Enfin, comme $f(x) \in [0,1]$ pour tout $x \in \mathbb{N}$, $(Y_n)_{n\ge 0}$ est une martingale bornée.

3. $\tau = \tau_a \wedge \tau_b = \inf\{n \ge 0; X_n \in \{a;b\}\}$, donc $\tau_a \wedge \tau_b$ est le temps d'entrée de la suite X_n dans le borélien $\{a;b\}$. Comme la suite (X_n) est adaptée à la filtration $\mathcal{F}_n$, τ est un temps d'arrêt adapté à la filtration $\mathcal{F}_n$.

4. $(Y_n)_{n\ge 0}$ est une martingale adaptée à la filtration $\mathcal{F}_n$ et τ est un temps d'arrêt adapté à la filtration $\mathcal{F}_n$. D'après le théorème d'arrêt $(Y_{\tau\wedge n})_{n\ge 0}$ est également une martingale adaptée à la filtration $\mathcal{F}_n$.
En particulier, pour tout n

$$\mathbb{E}^x Y_{\tau\wedge n} = \mathbb{E}^x Y_{\tau\wedge 0} = \mathbb{E}^x Y_0 = \frac{1}{1+x}.$$

On a admis que $\tau < +\infty$ p.s. On a donc

$$\lim_{n\to+\infty} Y_{\tau\wedge n} = Y_\tau \ \mathbb{P}^x\text{p.s.}$$

En appliquant le théorème de convergence dominée (avec domination par 1), on voit alors que

$$\mathbb{E}^x Y_\tau = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}^x Y_{\tau\wedge n} = \frac{1}{1+x} = f(x).$$

Cependant

$$\begin{aligned}
Y_\tau &= Y_\tau 1\!\!1_{\{\tau_a<\tau_b\}} + Y_\tau 1\!\!1_{\{\tau_a\ge\tau_b\}}\\
&= Y_{\tau_a} 1\!\!1_{\{\tau_a<\tau_b\}} + Y_{\tau_b} 1\!\!1_{\{\tau_a\ge\tau_b\}}\\
&= f(R_{\tau_a}) 1\!\!1_{\{\tau_a<\tau_b\}} + f(R_{\tau_b}) 1\!\!1_{\tau_a\ge\tau_b}\\
&= f(a) 1\!\!1_{\{\tau_a<\tau_b\}} + f(b) 1\!\!1_{\tau_a\ge\tau_b}
\end{aligned}$$

En intégrant, on a alors,

$$f(x) = \mathbb{E}^x Y_\tau = f(a)\mathbb{P}^x(\{\tau_a<\tau_b\}) + f(b)\mathbb{P}^x(\tau_a\ge\tau_b),$$

soit si l'on pose $q = \mathbb{P}^x(\{\tau_a<\tau_b\})$

$$f(x) = qf(a) + (1-q)f(b),$$

d'où

$$q = \frac{f(b)-f(x)}{f(b)-f(a)}$$

5. Pour tout p on a $\mathbb{P}^x$ presque sûrement $R_{p+1} \le R_p + 1$: on en déduit que pour tout n $\tau_n \ge n - x$. En particulier τ_n tend $\mathbb{P}^x$ presque sûrement vers $+\infty$.
6. Ainsi

$$1\!\!1_{\{\tau_a<+\infty\}} = \lim_{n\to+\infty} 1\!\!1_{\{\tau_a<\tau_n\}}$$

En appliquant le théorème de convergence dominée (avec domination par 1), on a alors

$$\mathbb{E}^x 1\!\!1_{\{\tau_a<+\infty\}} = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}^x 1\!\!1_{\{\tau_a<\tau_n\}}$$

soit

$$\mathbb{P}^x(\tau_a<+\infty) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}^x(\tau_a<\tau_n) = \lim_{n\to+\infty} \frac{f(n)-f(x)}{f(n)-f(a)} = \frac{f(x)}{f(a)} = \frac{a+1}{x+1}.$$

7. On a pour tout n $|X_n - X_{n+1}| \in \{0;1\}$: il s'ensuit que $\{X_n; n\ge 0\}$ est une partie connexe de $\mathbb{Z}$ contenant $X_0 = x$.
Ainsi, si $a \in \{0,\dots,x\}$, dire que $I \le a$ signifie que a est une valeur atteinte par la suite $(X_n)_{n\ge0}$, c'est à dire que $\tau_a < +\infty$. Ainsi

$$\{I \le a\} = \{\tau_a < +\infty\},$$

d'où

$$\mathbb{P}^x(I\le a) = \mathbb{P}^x(\tau_a<+\infty) = \frac{a+1}{x+1},$$

ce qui entraîne aisément que I suit la loi uniforme sur $\{0,\dots,x\}$: en effet pour tout $i \in \{0,\dots x\}$, on a

$$\mathbb{P}^x(\tau_a = i) = \mathbb{P}^x(I\le i) - \mathbb{P}^x(I \le i-1) = \frac{i+1}{x+1} - \frac{i}{x+1} = \frac{1}{x+1}.$$

FIN