Université de Nancy I **Master 1**

Nancy-Université
Université Henri Poincaré

Probabilités et Modélisation Stochastique

Examen du 10 janvier 2009

corrigé

Partie I

1. On a la récurrence $S_{n+1} = F(S_n, X_{n+1})$, avec $F(x, y) = x + y$. Comme, sous $\mathbb{P}^x$, $(X_n)_{n\geq 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées indépendantes de X_0, $(S_n)_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov sous $\mathbb{P}^x$.
2. $S_{n+1} = S_n + X_{n+1}$, donc $\mathbb{E}^x[S_{n+1}|\mathcal{F}_n] = \mathbb{E}^x[S_n|\mathcal{F}_n] + \mathbb{E}^x[X_{n+1}|\mathcal{F}_n]$. Comme S_n est $\mathcal{F}_n$ mesurable et X_{n+1} indépendant de $\mathcal{F}_n$, on a $\mathbb{E}^x[S_n|\mathcal{F}_n] = S_n$ et $\mathbb{E}^x[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] = \mathbb{E}^x[X_{n+1}] = p.1 + (1-p).(-1) = 2p - 1$. Finalement
$$\mathbb{E}^x[S_{n+1}|\mathcal{F}_n] - S_n = 2p - 1,$$
de sorte que (S_n) est une martingale si $p = 1/2$, une sous-martingale si $p \geq 1/2$, une surmartingale si $p \leq 1/2$.
3. On va procéder par récurrence sur n : si $n = 0$, $I_0 = \{S_0\} = \{x\}$ $\mathbb{P}^x$ presque sûrement. Comme $(I_n)_{n\geq 0}$ est une suite croissante pour l'inclusion, tous les I_n contiendront x. Supposons qu'il existe a_n, b_n dans $\mathbb{Z}$, avec $I_n = \{a_n, \dots, b_n\}$. $S_n \in \{a_n, \dots, b_n\}$ et $X_{n+1} \in \{+1, -1\}$. Si $S_n = a_n$ et $X_{n+1} = -1$, alors $I_{n+1} = \{a_n - 1\} \cup I_n = \{a_n - 1, \dots, b_n\}$. Si $S_n = b_n$ et $X_{n+1} = 1$, alors $I_{n+1} = \{b_n + 1\} \cup I_n = \{a_n, \dots, b_n + 1\}$. Dans les autres cas, $S_{n+1} \in I_n$ et donc $I_{n+1} = I_n$. Dans tous les cas I_{n+1} est un intervalle de $\mathbb{Z}$.
4. Par définition, on a de manière déterministe par inclusion
$$T^k \geq \inf\{n \geq 0 : \quad S_n \geq k\}.$$
Reste à démontrer $\mathbb{P}^0$ presque sûrement l'inégalité inverse, c'est à dire
$$T^k \leq \inf\{n \geq 0 : \quad S_n \geq k\}.$$
Posons $n = \inf\{n \geq 0 : \quad S_n \geq k\}$. Si $n = +\infty$, l'inégalité est évidente. Sinon, I_n est $\mathbb{P}^0$ presque sûrement un intervalle de $\mathbb{N}$ qui contient 0 et un entier naturel dépassant k : c'est donc un intervalle qui contient k, ce qui signifie que $T^k \leq n$.
5. T^k est le temps d'entrée de la suite (S_n) dans le borélien $\{k\}$. Comme (S_n) est adaptée à la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$, T^k est un temps d'arrêt adapté à la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$.
6. Pour y entier naturel, on a
$$(T^{m+1} \leq y) \iff (\exists n \in \mathbb{N}; n \leq y \text{ et } S_n = m + 1)$$
donc
$$(T^{m+1} \leq T^m + v) \iff (\exists n \in \mathbb{N}; n \leq T^m + v \text{ et } S_n = m + 1)$$

Cependant, comme $T^m \leq \inf\{n \geq 0 : \quad S_n \geq m\}$, on a $S_n \leq m$ pour $n \leq T^m$, donc si $T^m < +\infty$, on peut écrire

$$(T^{m+1} \leq T^m + v) \iff (\exists n \in \mathbb{N}, n > T_m; n \leq T^m + v \text{ et } S_n = m+1),$$

soit

$$(T^{m+1} \leq T^m + v) \iff (\exists n \in \mathbb{N}^*, n \leq v \text{ et } S_{T^m+n} = m+1),$$

Ainsi, quel que soit l' entier naturel v, on a bien

$$(T^{m+1} \leq T^m + v) \iff (\exists k \leq v; S_{T^m+k} = m+1)$$

7. Comme $\{T^m < +\infty\} = \{T^m < +\infty, S_{T_m} = m\}$, on a

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}^0(T^m < +\infty, A, T^{m+1} \leq T^m + v) \\ = \; & \mathbb{P}^*(T^m < +\infty, A, \exists k \leq v; S_{T^m+k} = m+1) \\ = \; & \mathbb{P}^0(T^m < +\infty, S_{T_m} = m, A, \exists k \leq v; S_{T^m+k} = m+1) \\ = \; & \mathbb{P}^0(T^m < +\infty, S_{T_m} = m, A)\mathbb{P}^m(\exists k \leq v; S_k = m+1) \end{aligned}$$

où la dernière égalité vient de la propriété de Markov forte. Ainsi

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}^0(T^m < +\infty, A, T^{m+1} \leq T^m + v) \\ = \; & \mathbb{P}^0(T^m < +\infty, A)\mathbb{P}^m(\exists k \leq v; S_k = m+1) \\ = \; & \mathbb{P}^0(T^m < +\infty, A)\mathbb{P}^m(\exists k \leq v; S_k - S_0 = 1) \\ = \; & \mathbb{P}^0(T^m < +\infty, A)\mathbb{P}^m(\exists k \in \{1, \dots, v\}; X_1 + \dots + X_k = 1) \\ = \; & \mathbb{P}^0(T^m < +\infty, A)\mathbb{P}^0(\exists k \in \{1, \dots, v\}; X_1 + \dots + X_k = 1) \end{aligned}$$

En effet, la loi du vecteur $(X_1, \dots, X_k)$ sous $\mathbb{P}^m$ ne dépend pas de m : c'est toujours $((1-p)\delta_{(-1)} + p\delta_1)^k$. Ainsi

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^0(T^m < +\infty, A, T^{m+1} \leq T^m + v) &= \mathbb{P}^0(T^m < +\infty, A)\mathbb{P}^0(\exists k \in \{1, \dots, v\}; X_1 + \dots + X_k = 1) \\ &= \mathbb{P}^0(T^m < +\infty, A)\mathbb{P}^0(T^1 \leq v). \end{aligned}$$

Partie II

On suppose dans cette partie que $p > 1/2$.

1. $\frac{S_n}{n} = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$: on a une somme de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées avec un moment d'ordre 1 : d'après la loi forte des grands nombres, S_n/n tend $\mathbb{P}^0$-presque sûrement vers $\mathbb{E}^0[X_1] = 2p - 1 > 0$; on a donc l'équivalent $S_n \sim (2p-1)n$.
2. $S_n \sim (2p-1)n$, donc pour n assez grand $S_n \geq k$, ce qui, d'après la caractérisation vue en I.4, donne $T^k \leq n$, d'où T^k fini. $\frac{S_n}{n}$ tend presque sûrement vers $2p-1$. T^m est une suite d'entiers strictement croissante, donc $\frac{S_{T^m}}{T^m}$ tend presque sûrement vers $2p-1$, mais $S_{T^m} = m$, donc m/T^m tend presque sûrement vers $2p-1$, ce qui entraîne que $\frac{T^m}{m}$ converge P^0-presque sûrement vers $\frac{1}{2p-1}$ lorsque m tend vers l'infini.
3. Soient v un entier naturel et $A \in \mathcal{F}_{T^m}$.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^0(A, T^{m+1} - T^m \leq v) &= \mathbb{P}^0(A, T^{m+1} \leq T^m + v) \\ &= \mathbb{P}^0(A)\mathbb{P}^0(T^1 \leq v). \end{aligned}$$

En prenant $A = \Omega$ on obtient $\mathbb{P}^0(T^{m+1} - T^m \leq v) = \mathbb{P}^0(T^1 \leq v)$, ce qui montre que $T^{m+1} - T^m$ a même loi que T^1 sous $\mathbb{P}^0$. En réinjectant dans l'identité précédente, on a

$$\mathbb{P}^0(A, T^{m+1} - T^m \leq v) \quad = \quad \mathbb{P}^0(A)\mathbb{P}^0(T^{m+1} - T^m \leq v),$$

ce qui donne alors l'indépendance voulue.

4. Pour tout k, le temps d'arrêt T^k est $\mathcal{F}_{T^m}$-mesurable. Si $k \leq m$, $T^k \leq T^m$, donc $\mathcal{F}_{T^k} \subset \mathcal{F}_{T^m}$. Ainsi pour tout m, $T^1, T^2, \dots, T^m$ et donc $T^1, T^2 - T^1, \dots T^m - T^{m-1}$ sont $\mathcal{F}_{T^m}$ mesurables tandis que $T^{m+1} - T^m$ est indépendante de $\mathcal{F}_{T^m}$; chaque variable aléatoire étant indépendante des précédentes, les variables aléatoires $(T^{k+1} - T^k)_{k\geq 0}$ sont des variables aléatoires indépendantes.
5. Par suite, les variables aléatoires $((T^{k+1} - T^k) \wedge M)_{k\geq 0}$ sont des variables aléatoires indépendantes, leur loi commune est la loi image de T^1 par $x \mapsto x \wedge M$: elle est à support dans $[0, M]$, donc a un moment d'ordre 1. D'après la loi forte des grands nombres, on a donc $\mathbb{P}_0$-presque sûrement,

$$\mathbb{E}^0[T^1 \wedge M] = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \big((T^{k+1} - T^k) \wedge M\big)$$

Cependant

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \big((T^{k+1} - T^k) \wedge M\big) \quad &\leq \quad \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \big((T^{k+1} - T^k)\big) \\ &\leq \quad \frac{T^n}{n} \end{aligned}$$

Comme $\frac{T^n}{n}$ converge presque sûrement vers $\frac{1}{2p-1}$, on en déduit que

$$\mathbb{E}^0[T^1 \wedge M] \leq \frac{1}{2p-1}.$$

6. T^1 est la limite (inférieure) de la suite positive $(T^1 \wedge M)_{M\geq 1}$, donc d'après le lemme de Fatou

$$\mathbb{E}^0[T^1] \leq \liminf_{M\to+\infty} \mathbb{E}^0[T^1 \wedge M] \leq \frac{1}{2p-1} < +\infty,$$

ce qui montre que T^1 est intégrable sous $\mathbb{P}^0$.
7. Comme on sait maintenant que T^1 est intégrable sous $\mathbb{P}^0$, on peut appliquer la loi forte des grands nombres à la suite des variables aléatoires $(T^{k+1} - T^k)_{k\geq 0}$, qui sont des variables aléatoires iid de loi T^1. Ainsi

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \big((T^{k+1} - T^k)\big) \quad = \quad \frac{T^n}{n}$$

tend presque sûrement vers $\mathbb{E}^0 T^1$. Or $\frac{T^n}{n}$ tend presque sûrement vers $\frac{1}{2p-1}$, donc $\mathbb{E}^0[T^1] = \frac{1}{2p-1}$. Enfin

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^0 T^k \quad &= \quad \sum_{i=1}^{k} \mathbb{E}^0[(T^{i+1} - T^i)] \\ &= \quad k\mathbb{E}^0[T^1] = \frac{k}{2p-1}. \end{aligned}$$

Partie III

On suppose dans cette partie que $p < 1/2$.

1. $\frac{S_n}{n} = \frac{X_1+\cdots+X_n}{n}$: on a une somme de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées avec un moment d'ordre 1 : d'après la loi forte des grands nombres, S_n/n tend $\mathbb{P}^0$-presque sûrement vers $\mathbb{E}^0[X_1] = 2p-1 < 0$; on a donc l'équivalent $S_n \sim (2p-1)n$. Ainsi S_n tend $\mathbb{P}^0$-presque sûrement vers $-\infty$, et donc est plus petit que -1 à partir d'un certain rang : presque sûrement, il n'y a, partant de 0, qu'un nombre fini de passages en 0, donc l'état 0 de la chaîne $(S_n)_{n\geq 0}$ est transitoire.
2. L'état 0 est transitoire, donc $\mathbb{P}^0(\exists n > 0; S_n = 0) = \mathbb{P}^0(T^1 < +\infty) < 1$, soit $\mathbb{P}^0(T^1 = +\infty) > 0$.
3. On pose $\rho = \mathbb{P}^0(T^1 < +\infty)$. En prenant $A = \Omega$ dans I.7, on a

   $$\mathbb{P}^0(T^m < +\infty, T^{m+1} \leq T^m + v) \quad = \quad \mathbb{P}^0(T^m < +\infty)\mathbb{P}^0(T^1 \leq v).$$

   En faisant tendre v vers $+\infty$, le théorème de continuité séquentielle décroissante donne

   $$\mathbb{P}^0(T^m < +\infty, T^{m+1} < +\infty) \quad = \quad \mathbb{P}^0(T^m < +\infty)\mathbb{P}^0(T^1 < +\infty).$$

   Comme $T^m \leq T^{m+1}$, on en déduit $\mathbb{P}^0(T^{m+1} < +\infty) = \rho\mathbb{P}^0(T^m < +\infty)$, d'où, par récurrence $\mathbb{P}^0(T^m < +\infty) = \rho^m$.
4. $c^{S_{n+1}} = c^{S_n}c^{X_{n+1}}$. c^{S_n} est $\mathcal{F}_n$ mesurable, donc

   $$\mathbb{E}^0[c^{S_{n+1}}|\mathcal{F}_n] = c^{S_n}\mathbb{E}^0[c^{X_{n+1}}|\mathcal{F}_n].$$

   Mais $c^{X_{n+1}}$ est indépendante de $\mathcal{F}_n$, donc $\mathbb{E}[c^{X_{n+1}}|\mathcal{F}_n] = \mathbb{E}^0[c^{X_{n+1}}] = pc^1 + (1-p)c^{-1}$. Ainsi, si $pc^1 + (1-p)c^{-1} = 1$, on aura $\mathbb{E}^0[c^{S_{n+1}}|\mathcal{F}_n] = c^{S_n}$ qui sera donc une martingale.

   $(pc^1+(1-p)c^{-1} = 1) \iff (c \neq 0)$ et $(pc^2-c+(1-p) = 0) \iff (pc^2-c+(1-p) = 0)$.

   Cette équation du second degré a deux racines : la plus grande est

   $$\frac{1+\sqrt{1-4p(1-p)}}{2p} \geq \frac{1}{2p} > 1,$$

   ce qui donne le résultat voulu. On peut remarquer aussi que $1-4p(1-p) = (1-2p)^2$, donc $\sqrt{1-4p(1-p)} = |1-2p| = 1-2p$, d'où $c = \frac{1-p}{p}$.
5. $W_n = c^{S_n}$ est une martingale et $Z_n = W_{n\wedge T^1}$, donc d'après le théorème d'arrêt, $Z_n = c^{Y_n}$ est une martingale. Pour tout $k \leq T^1$, on a $S_k \leq 1$, $\mathbb{P}^0$ presque sûrement, donc pour tout n, $S_{n\wedge T^1} \leq 1$ et donc $Z_n = c^{S_{n\wedge T^1}}$ vérifie $0 \leq Z_n \leq c^1 = c$: $Z_n = c^{Y_n}$ est donc bien une martingale bornée sous $\mathbb{P}^0$.
6. Si $T^1 = +\infty$, alors pour tout n, $Z_n = c^{S_n}$. On a vu que S_n tend vers $-\infty$, donc comme $c > 1$, Z_n tend vers $0 = c \times 1\!\!1_{\{T^1<+\infty\}}$.
   Si $T^1 < +\infty$, alors pour $n \geq T^1$, $Z_n = c^{S_{n\wedge T^1}} = c^{S_{T^1}} = c$, et donc Z_n tend vers $c = c \times 1\!\!1_{\{T^1<+\infty\}}$. Dans les deux cas, Z_n converge vers $c \times 1\!\!1_{\{T^1<+\infty\}}$.
7. Z_n converge vers $c \times 1\!\!1_{\{T^1<+\infty\}}$ et $|Z_n| \leq c$. Ainsi, d'après le théorème de convergence dominée

   $$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}^0[Z_n] = \mathbb{E}^0[c \times 1\!\!1_{\{T^1<+\infty\}}] = c\mathbb{P}^0(T^1 < +\infty) = c\rho.$$

   Cependant, (Z_n) est une martingale, donc $\mathbb{E}^0[Z_n] = \mathbb{E}^0[Z_0]$ pour tout n. Ainsi

   $$c\rho = \mathbb{E}^0[Z_0] = \mathbb{E}^0[c^{S_{0\wedge T^1}}] = \mathbb{E}^0[c^{S_0}] = \mathbb{E}^0[c^0] = 1.$$

   Finalement,

   $$\rho = \frac{1}{c} = \frac{p}{1-p}.$$

FIN