Université de Nancy I **Master 1**

Nancy-Université
Université Henri Poincaré

Probabilités et Modélisation Stochastique

Examen du 10 janvier 2009

durée 3h

Les documents papier (livres, polycopiés, notes manuscrites,...) sont autorisés.
Les calculatrices respectant la règlementation (dimensions inférieures à 15 cm par 20 cm, alimentation autonome, pas d'imprimante) sont autorisées.
Tout instrument de communication, qu'il en soit fait ou non usage, est interdit.

Soit $\Omega = \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ et $\mathcal{F} = \mathcal{B}(\Omega)$. On note $(X_i)_{i\geq 0}$ les projections canoniques : pour $\omega \in \Omega$, on a $X_i(\omega) = \omega_i$. On peut alors définir une filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ en posant $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, X_1, \dots, X_n)$ pour tout $n \geq 0$. Soit $p \in [0, 1]$.

Pour tout entier relatif k, on note

$$\mathbb{P}^k = \delta_k \otimes ((1-p)\delta_{(-1)} + p\delta_1)^{\otimes \mathbb{N}^*}.$$

Ainsi, sous la loi $\mathbb{P}^k$, $X_0 = k$ et $(X_n)_{n\geq 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées avec

$$\forall n \geq 1 \quad \mathbb{P}^k(X_n = 1) = 1 - \mathbb{P}^k(X_n = -1) = p.$$

Par ailleurs, on notera $\mathbb{E}^k$ l'intégrale par rapport à la mesure de probabilité $\mathbb{P}^k$.

On remarquera que la notation $\mathbb{P}^k$ utilisée ci-dessus est compatible avec les conventions usuelles pour l'écriture des chaînes de Markov.

On pose $S_0 = X_0$ ainsi que, pour tout $n \geq 1$,

$$S_n = X_0 + \sum_{i=1}^{n} X_i.$$

Dans ce problème, on s'intéressera au temps nécessaire à la suite $(S_n)_{n\geq 0}$ pour atteindre un point donné. À cet effet, pour $k \in \mathbb{Z}$, on définit

$$T^k = \inf\{n \geq 0 : \quad S_n = k\}.$$

Les parties II et III sont indépendantes.

Partie I

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{Z}$, $(S_n)_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov sous $\mathbb{P}^x$.
2. En fonction de la valeur de p, discuter si $(S_n)_{n\geq 0}$ est une martingale, une sous-martingale, une surmartingale sous $\mathbb{P}^x$.
3. On pose I_n l'ensemble des valeurs prises par la suite (S_k) entre les instants 0 et n : $I_n = \{S_k; k \in \{0, \dots, n\}\}$. Montrer que pour tout $n \geq 0$ et tout $x \in \mathbb{Z}$, $\mathbb{P}^x$-presque sûrement, I_n est un intervalle de $\mathbb{Z}$ qui contient x. (On suggère de procéder par récurrence.)
4. En déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}$

$$T^k = \inf\{n \geq 0 : \quad S_n \geq k\} \quad \mathbb{P}^0 \text{ p.s.}$$

5. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{Z}$, T^k est un temps d'arrêt adapté à la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$.
6. Soit m un entier naturel. Montrer que si $X_0 = 0$ et $T^m < +\infty$, alors pour tout l'entier naturel v, on a

$$(T^{m+1} \leq T^m + v) \iff (\exists k \leq v; S_{T^m+k} = m+1)$$

7. En déduire que quel que soit l'entier naturel v, et quel que soit l'événement $A \in \mathcal{F}_{T^m}$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}^0(A, T^m < +\infty, T^{m+1} \leq T^m + v) &= \mathbb{P}^0(A, T^m < +\infty)\mathbb{P}^m(\exists k \leq v; S_k = m+1) \\ &= \mathbb{P}^0(A, T^m < +\infty)\mathbb{P}^0(T^1 \leq v).\end{aligned}$$

Partie II

On suppose dans cette partie que $p > 1/2$.

1. Montrer que, $\mathbb{P}^0$-presque sûrement, on a l'équivalent

$$S_n \sim (2p-1)n.$$

2. En déduire que
   - pour tout $k \geq 0$, T^k est $\mathbb{P}^0$-presque sûrement fini.
   - $\frac{T^m}{m}$ converge P^0-presque sûrement vers $\frac{1}{2p-1}$ lorsque m tend vers l'infini.

   Indication : pour le deuxième point, on pourra considérer S_{T^m}.
3. Soit m un entier naturel. Montrer que $T^{m+1} - T^m$ est indépendante de $\mathcal{F}_{T^m}$ et que $T^{m+1} - T^m$ a même loi que T^1 sous $\mathbb{P}^0$.
4. Montrer que les variables aléatoires $(T^{m+1} - T^m)_{m\geq 0}$ sont indépendantes sous $\mathbb{P}^0$.
5. Soit M un entier naturel non nul. Montrer que $\mathbb{P}_0$-presque sûrement,

$$\mathbb{E}^0[T^1 \wedge M] = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\big((T^{k+1} - T^k) \wedge M\big) \leq \frac{1}{2p-1}.$$

6. Montrer que T^1 est intégrable sous $\mathbb{P}^0$.
7. Montrer que tout tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{E}^0[T^k] = \frac{k}{2p-1}$. (On suggère de commencer par traiter le cas $k = 1$).

Partie III

On suppose dans cette partie que $p < 1/2$.

1. Montrer que S_n tend $\mathbb{P}^0$-presque sûrement vers $-\infty$. En déduire que l'état 0 de la chaîne $(S_n)_{n\geq 0}$ est transitoire.
2. En déduire que $\mathbb{P}^0(T^1 = +\infty) > 0$.
3. On pose $\rho = \mathbb{P}^0(T^1 < +\infty)$. Montrer que $\mathbb{P}^0(T^m < +\infty) = \rho^m$.
4. Montrer qu'il existe $c > 1$ tel que c^{S_n} soit une martingale sous $\mathbb{P}^0$.
5. On pose enfin $Y_n = S_{n\wedge T^1}$. Soit c le réel déterminé à la question précédente. Montrer que $Z_n = c^{Y_n}$ est une martingale bornée sous $\mathbb{P}^0$.
6. Montrer que Z_n converge $\mathbb{P}^0$-presque sûrement vers $c \times \mathbb{1}_{\{T^1<+\infty\}}$.
7. Montrer que

$$\rho = \frac{1}{c} = \frac{p}{1-p}.$$

FIN