Université de Nancy I **Master 1**

Probabilités et Modélisation Stochastique

Examen du 7 janvier 2008

Partie I

1. $\mathbb{E}^k X_1 = 1\mathbb{P}^k(X=1) + (-1)\mathbb{P}^k(X=-1) + (-2)\mathbb{P}^k(X=-2) = \frac{1-1-2}{3} = -\frac{2}{3}$. $\mathbb{E}^k X_1^2 = 1^2\mathbb{P}^k(X=1) + (-1)^2\mathbb{P}^k(X=-1) + (-2)^2\mathbb{P}^k(X=2) = \frac{1+1+4}{3} = 2$. $\text{Var } X_1 = \mathbb{E}^k X_1^2 - (\mathbb{E}^k X_1)^2 = 2 - \frac{4}{9} = \frac{14}{9}$. Comme les $(X_n)_{n\geq 1}$ on toutes la même loi, on a pour tout $n \geq 1$, $\mathbb{E}^k X_n = -\frac{2}{3}$ et $\text{Var } X_n = \frac{14}{9}$. En revanche $\mathbb{E}^k X_0 = k$ et $\text{Var } X_0 = 0$. Par linéarité, $\mathbb{E}^k S_n = k - \frac{2}{3}n$. Comme S_n est une somme de variables aléatoires indépendantes, $\text{Var } S_n$ est la somme des variances, donc $\text{Var } S_n = \frac{14}{9}n$.
2. Comme $(X_n)_{n\geq 0}$ est à valeurs dans $\mathbb{Z}$, $(S_n)_{n\geq 0}$ est aussi à valeurs dans $\mathbb{Z}$, et par suite $(Y_n)_{n\geq 0}$ également. Par définition de T, on sait que $S_n > 0$ pour $n < T$. Si $T = +\infty$, alors on a pour tout n, $n < T$ et $S_{T\wedge n} = S_n > 0 \geq -1$. Supposons donc T fini. Comme $(S_n)_{n\geq 0}$ est à valeurs entières, on a, pour $n < T$, $S_n \geq 1$. Comme $S_T = S_{T-1} + X_T$ et que $X_T \geq -2$, on a alors $S_T \geq 1 + (-2) \geq -1$. Finalement, $S_n \geq -1$ pour tout $n \leq T$. Cependant, $T \wedge n \leq T$, donc on a bien $S_{T\wedge n} \geq -1$, ce qui achève de montrer que $(Y_n)_{n\geq 0}$ prend ses valeurs dans $[-1, +\infty[\cap \mathbb{Z}$.
3. – Si $n < T$, alors $Y_n = S_n$ et $S_n > 0$, d'où $|Y_n| = Y_n = \max(S_n, 0)$.
   – Sinon, on a $n \geq T$ (ce qui implique que T est fini) et $Y_n = S_T$ Par définition du temps d'arrêt, on a $S_T \leq 0$. Finalement $Y_n = S_T \in \mathbb{Z} \cap [-1, +\infty[\cap]-\infty, 0] = \{-1; 0\}$.

   Il est facile de voir que dans les deux cas, on a bien $|Y_n| \leq 1 + \max(S_n, 0)$.
4. Par construction, la suite $(S_n)_{n\geq 0}$ est adaptée à la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$. Comme T est le temps d'entrée de la suite $(S_n)_{n\geq 0}$ dans le borélien $\mathbb{R}^-$, T est bien un temps d'arrêt adaptée à la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$.
5. Montrons d'abord la première égalité :
   – Si $T \leq n$, alors $T < +\infty$ et l'on a $(n+1)\wedge T = n \wedge T = T$, d'où $Y_{n+1} - Y_n = S_T - S_T = 0 = 1\!\!1_{\{T>n\}} X_{n+1}$.
   – Si $T > n$, alors $T \geq n+1$, d'où $(n+1)\wedge T = n+1$; de même $n \wedge T = n$. Ainsi $Y_{n+1} - Y_n = S_{n+1} - S_n = X_{n+1} = 1\!\!1_{\{T>n\}} X_{n+1}$.

   Dans les deux cas, on a bien $Y_{n+1} - Y_n = 1\!\!1_{\{T>n\}} X_{n+1}$.
   Maintenant, il suffit de montrer que $\{Y_n > 0\} = \{T > n\}$. Si $T > n$, on a $Y_n = X_n$ et $X_k > 0$ pour tout $k \leq n$, donc $Y_n > 0$. Réciproquement, si $T \leq n$, T est fini et pour tout $k \geq T$, $Y_k = S_{k\wedge T} = S_T \leq 0$. En particulier $Y_n \leq 0$. On a donc bien $\{Y_n > 0\} = \{T > n\}$, ce qui achève la preuve.
6. $$Y_n = k + (Y_n - Y_0) = k + \sum_{k=1}^{n} (Y_k - Y_{k-1}) = k + \sum_{k=1}^{n} 1\!\!1_{\{T>i-1\}} X_i$$
   Comme T est un temps d'arrêt adapté à la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$, l'événement $\{T > i-1\}$ est $\mathcal{F}_{i-1}$-mesurable, et donc la variable aléatoire$1\!\!1_{\{T>i-1\}}$ est $\mathcal{F}_{i-1}$-mesurable. Comme la suite $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ est croissante pour l'inclusion, $1\!\!1_{\{T>i-1\}}$ est $\mathcal{F}_n$-mesurable. Finalement Y_n est une somme de produits d'applications $\mathcal{F}_n$-mesurables, donc Y_n est $\mathcal{F}_n$-mesurable, ce qui montre que la suite $(Y_n)_{n\geq 0}$ est adaptée à la filtration $(\mathcal{F}_n)$. Comme Y_n est $\mathcal{F}_n$-mesurable, on a
   $$\begin{aligned} \mathbb{E}^k[Y_{n+1}|\mathcal{F}_n] - Y_n &= \mathbb{E}^k[Y_{n+1}|\mathcal{F}_n] - \mathbb{E}^k[Y_n|\mathcal{F}_n] \\ &= \mathbb{E}^k[(Y_{n+1} - Y_n)|\mathcal{F}_n] \end{aligned}$$

Cependant, d'après la question I.5, $Y_{n+1} - Y_n = 1\!\!1_{\{T>n\}} X_{n+1}$, d'où

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}^k[Y_{n+1}|\mathcal{F}_n] - Y_n &= \mathbb{E}^k[(Y_{n+1} - Y_n)|\mathcal{F}_n] \\
&= \mathbb{E}^k[1\!\!1_{\{T>n\}} X_{n+1}|\mathcal{F}_n] \\
&= 1\!\!1_{\{T>n\}} \mathbb{E}^k[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] \text{ car } \{T > n\} \in \mathcal{F}_n \\
&= 1\!\!1_{\{T>n\}} \mathbb{E}^k[X_{n+1}] \text{ car } X_{n+1} \text{ est indépendante de } \mathcal{F}_n \\
&= -\frac{2}{3} 1\!\!1_{\{T>n\}} \\
&\leq 0,
\end{aligned}$$

ce qui montre que $(Y_n)_{n\geq 0}$ est une surmartingale.

7. Soit $x \geq 0$ et $n \geq 0$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}^k(S_n - k \geq x) &= \mathbb{P}^k(S_n + \frac{2}{3}n - k \geq x + \frac{2}{3}n) \\
&= \mathbb{P}^k(S_n - \mathbb{E}^k S_n \geq x + \frac{2}{3}n) \\
&\leq \mathbb{P}^k(|S_n - \mathbb{E}^k S_n| \geq x + \frac{2}{3}n) \\
&\leq \frac{\text{Var } S_n}{(x + \frac{2}{3}n)^2} \text{ d'après l'inégalité de Tchebitchev} \\
&\leq \frac{\frac{14}{9}n}{(x + \frac{2}{3}n)^2} = \frac{14n}{(3x + 2n)^2}.
\end{aligned}$$

8. $\max(S_n - k, 0)$ est une variable aléatoire positive, donc

$$\mathbb{E}^k \max(S_n - k, 0) = \int_0^{+\infty} \mathbb{P}^k(\max(S_n - k, 0) > x) \, dx$$

Cependant, pour $x \geq 0$, $\mathbb{P}^k(\max(S_n - k, 0) > x) = \mathbb{P}^k(S_n - k > x)$, d'où

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}^k \max(S_n - k, 0) &= \int_0^{+\infty} \mathbb{P}^k(S_n - k \geq x) \\
&\leq \frac{14n}{9} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x + \frac{2}{3}n)^2} = \frac{14n}{9} \frac{1}{(0 + \frac{2}{3}n)} \\
&\leq \frac{7}{2}.
\end{aligned}$$

9. On a

$$|Y_n| \leq 1 + \max(S_n, 0) = 1 + k + \max(S_n - k, -k) \leq 1 + k + \max(S_n - k, 0)$$

Ainsi

$$\forall n \geq 0 \quad \mathbb{E}^k| - Y_n| = \mathbb{E}^k|Y_n| \leq 1 + k + \mathbb{E}^k \max(S_n - k, 0) \leq 1 + k + \frac{7}{2}$$

Ainsi, sous $\mathbb{P}^k$ $(-Y_n)$ est une sous-martingale bornée dans L^1. D'après le théorème de Doob, $(-Y_n)$ converge donc presque sûrement vers une variable aléatoire réelle Z, donc $(Y_n)_{n\geq 0}$ converge $\mathbb{P}^k$ presque sûrement vers $Y_\infty = -Z$.

10. Supposons que (ω est tel que) $(Y_n)_{n\geq 0}$ converge. Comme $(Y_n)_{n\geq 0}$ est à valeurs dans $\mathbb{Z}$ qui est discret, $(Y_n)_{n\geq 0}$ est constante à partir d'un certain rang, donc il existe n tel que $Y_{n+1} - Y_n = 0$. Cependant $Y_{n+1} - Y_n = 1\!\!1_{\{T>n\}} X_{n+1}$. Comme $X_{n+1} \neq 0$, on a nécessairement $1\!\!1_{\{T>n\}} = 0$, donc $T \leq n < +\infty$. Ainsi $\{(Y_n)_{n\geq 0} \text{ converge}\} \subset \{T < +\infty\}$, d'où $\mathbb{P}^k(T < +\infty) = 1$.

11. D'après la loi forte des grands nombres, on sait que lorsque n tend vers l''infini, $\frac{S_n - k}{n}$ tend presque sûrement vers $\mathbb{E}^k X_1 = -2/3$, ce qui entraîne que $\frac{S_n}{n}$ tend presque sûrement vers $-2/3$: ainsi, pour n assez grand, on aura $\frac{S_n}{n} \leq 0$, d'où $S_n \leq 0$: cela montre que T est presque sûrement fini. Mais pour $n > T$, $Y_n = Y_T$, donc Y_n converge presque sûrement.

12. Soit $F : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ définie par

$$F(x, y) = x + 1\!\!1_{\{x>0\}} y = \begin{cases} x & \text{si } x \le 0 \\ x + y & \text{sinon} \end{cases}.$$

D'après la question I.5, on a $Y_{n+1} - Y_n = 1\!\!1_{\{Y_n>0\}} X_{n+1}$. Ainsi

$$Y_{n+1} = Y_n + (Y_{n+1} - Y_n) = Y_n + 1\!\!1_{\{Y_n>0\}} X_{n+1} = F(Y_n, X_{n+1}),$$

où encore $Y_{n+1} = f_{n+1}(X_{n+1})$, avec $f_n(x) = F(x, X_n)$. Comme $(X_n)_{n\ge1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées, il s'ensuit que (Y_n) est une chaîne de Markov de matrice de passage $(p_{i,j})$, avec $p_{i,j} = \mathbb{P}^k(f_1(i) = j)$. On a

$$\begin{cases} p_{-1,-1} = \mathbb{P}^k(f_1(-1) = -1) = \mathbb{P}^k(F(-1, X_1) = -1) = 1 \\ p_{0,0} = \mathbb{P}^k(f_1(0) = 0) = \mathbb{P}^k(F(0, X_1) = 0) = 1, \end{cases}$$

et, pour $j \in \{-2; -1; 1\}$ et $n \ge 1$

$$p_{n,n+k} = \mathbb{P}^k(f_1(n) = n+k) = \mathbb{P}^k(F(n, X_1) = n+k) = \mathbb{P}^k(n+X_1 = n+k) = \mathbb{P}^k(X_1 = k) = \frac{1}{3}.$$

Comme on l'a déjà noté (Y_n) prend ses valeurs dans l'ensemble des entiers naturels supérieurs ou égaux à -1. La chaîne démarre bien de $Y_0 = X_0 = k$.

Partie II

1. Notons $A = \{\omega \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}};\ \lim\limits_{n\to+\infty} \omega_i = 0\}$ et θ l'opérateur usuel de translation. Soit $k \ge 1$.

$$\begin{aligned} u_k &= \mathbb{P}^k(Y \in A) \\ &= \mathbb{P}^k(\theta(Y) \in A) \\ &= \mathbb{P}^k(Y_1 = k+1, \theta(Y) \in A) + \mathbb{P}^k(Y_1 = k-1, \theta(Y) \in A) + \mathbb{P}^k(Y_1 = k-2, \theta(Y) \in A) \\ &= \mathbb{P}^k(Y_1 = k+1)\mathbb{P}^{k+1}(Y \in A) + \mathbb{P}^k(Y_1 = k-1)\mathbb{P}^{k-1}(Y \in A) \\ &\quad + \mathbb{P}^k(Y_1 = k-2)\mathbb{P}^{k-2}(Y \in A) \\ &= \frac{1}{3}\mathbb{P}^{k+1}(Y \in A) + \frac{1}{3}\mathbb{P}^{k-1}(Y \in A) + \frac{1}{3}\mathbb{P}^{k-2}(Y \in A) \\ &= \frac{u_{k+1} + u_{k-1} + u_{k-2}}{3}. \end{aligned}$$

Les fonctions $(f_k)_{k\ge1}$ laissent les points 0 et -1 stables donc

$$\mathbb{P}^0(A) \ge \mathbb{P}^0(\forall i \ge 0\ Y_i = 0) = \mathbb{P}^0(Y_0 = 0) = 1,$$

de sorte que $u_0 = 1$. De la même manière

$$\mathbb{P}^{-1}(Y_\infty = -1) \ge \mathbb{P}^{-1}(\forall i \ge 0\ Y_i = -1) = \mathbb{P}^{-1}(Y_0 = -1) = 1,$$

ce qui entraîne que $u_{-1} = \mathbb{P}^{-1}(Y_\infty = 0) = 0$.

2. L'équation

$$\forall k \ge 1 \quad u_k = \frac{u_{k+1} + u_{k-1} + u_{k-2}}{3}. \tag{1}$$

peut se réécrire sous la forme

$$\forall k \ge 1 \quad u_{k+1} = 3u_k - u_{k-1} - u_{k-2}. \tag{2}$$

Considérons l'application de Φ de E dans $\mathbb{R}^3$ qui a v associe (v_{-1}, v_0, v_1). Soit $v \in \ker \Phi$: $v_{-1} = v_0 = v_1 = 0$. Il est facile de montrer par récurrence grâce à (2) que pour tout $i \ge -1$, on a $v_i = 0$, ce qui signifie que $v = 0$. Ainsi $\dim \ker \Phi = 0$, d'où $\dim E = \dim \operatorname{Im} \Phi \le \dim \mathbb{R}^3 = 3$.

La suite $(x^k)_{k\geq -1}$ est dans E si et seulement si on a

$$\forall k \geq 1 \quad x^{k+1} = 3x^k - x^{k-1} - x^{k-2},$$

soit en simplifiant par x^{k-2} (qui est non nul).

$$x^3 - 3x^2 + x + 1 = 0.$$

1 est une racine évidente de l'équation. En effectuant la division euclidienne de x^3-3x^2+x+1 par $x-1$, on obtient $x^3-3x^2+x+1 = (x-1)(x^2-2x-1) = (x-1)(x-r_1)(x-r_2)$, avec $r_1 = 1-\sqrt{2}$ et $r_2 = 1+\sqrt{2}$. Ainsi $x = 1, x = r_1$ et $x = r_2$ sont les valeurs possibles pour que $(x^i)_{i\geq -1}$ soit dans E. Notons $a = (1)_{i\geq 1}$, $b = (r_1^i)_{i\geq 1}$ et $c = (r_1^i)_{i\geq 1}$. Supposons qu'il existe α, β, γ dans $\mathbb{R}$ avec $\alpha a + \beta b + \gamma c = 0$. Si $\gamma \neq 0$, alors $(\alpha a + \beta b + \gamma c)_i$ est équivalent à γr_2^i lorsque i tend vers $+\infty$, ce qui contredirait $\alpha a + \beta b + \gamma c = 0$. On sait donc que $\gamma = 0$. Ainsi $\alpha a + \beta b = 0$, donc si $(\alpha, \beta) \neq (0,0)$, les vecteurs (a_0, a_1) et (b_0, b_1) sont liés, mais le déterminant

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ b_0 & b_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & r_1 \end{vmatrix} = r_1 - 1$$

est non nul, donc ce n'est pas possible. Finalement $(\alpha, \beta, \gamma) = (0,0,0)$ et la famille (a, b, c) est libre. Comme elle est de cardinal supérieure où égale à la dimension de E, c'est une base de E (qui est donc de dimension 3).

3. Soit $v \in V$. Comme (a, b, c) est une base de $E \supset V$, il existe (α, β, γ) avec $v = \alpha a + \beta b + \gamma c$. Si on avait $\gamma \neq 0$, on aurait équivalent à $v_i \sim \gamma r_2^i$ lorsque i tend vers $+\infty$, ce qui contredirait que v est bornée car $r_2 > 1$. Ainsi $\gamma = 0$, donc $V \subset \mathrm{Vect}(a, b)$. Cependant, il est facile de voir que a et b sont dans V : en effet, a et constante et b tend vers 0 en l'infini car $|r_1| < 1$. Ainsi $V = \mathrm{Vect}(a, b)$ et a et b en forment une base puisque (a, b) est libre.
4. On a déjà vu que u est dans E. u est bornée car $|u_k| = \mathbb{P}^k(Y_\infty = 0) \leq 1$, donc $u \in V$. Comme (a, b) est une base de V, il existe α et β tels que $u = \alpha a + \beta b$, soit
$$\forall k \geq -1 \quad u_k = \alpha + \beta r_1^k.$$
Comme $u_0 = 1$ et $u_{-1} = 0$, on a le système
$$\begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ \alpha + \beta r_1^{-1} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} (1 - r_1)\alpha = 1 \\ \alpha + \beta = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = \frac{1}{1-r_1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \beta = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} = -\frac{r_1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$
Ainsi
$$\forall k \geq -1 \quad \mathbb{P}^k(Y_\infty = 0) = \frac{1 - (1-\sqrt{2})^{k+1}}{\sqrt{2}}.$$
5. Y_∞ est une limite de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{Z} \cap [-1, +\infty[$, qui est fermé dans $\mathbb{R}$, donc Y_∞ est à valeurs dans $\mathbb{Z} \cap [-1, +\infty[$. Par ailleurs, on sait que $T < +\infty$ presque sûrement, et pour $n \geq T$, $Y_n = S_T$; donc $Y_\infty = S_T$. Cependant par définition de T, $S_T \leq 0$, donc comme on l'a déjà remarqué $S_T \in \mathbb{Z} \cap [-1, +\infty[\cap]-\infty, 0] = \{-1; 0\}$, et Y_∞ est à support dans $\{-1, 0\}$. On sait déjà que $\mathbb{P}^k(Y_\infty = 0) = \frac{1-(1-\sqrt{2})^{k+1}}{\sqrt{2}}$, donc on connait toute la loi puisque $\mathbb{P}^k(Y_\infty = -1) = 1 - \mathbb{P}^k(Y_\infty = 0) = 1 - \frac{1-(1-\sqrt{2})^{k+1}}{\sqrt{2}}$.

FIN