Probabilités et Modélisation Stochastique

Examen du 7 janvier 2008

durée 3h

Les documents papier (livres, polycopiés, notes manuscrites,...) sont autorisés.
Les calculatrices respectant la règlementation (dimensions inférieures à 15 cm par 20 cm, alimentation autonome, pas d'imprimante) sont autorisées.
Tout instrument de communication, qu'il en soit fait ou non usage, est interdit.

Soit $\Omega = \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ et $\mathcal{F} = \mathcal{B}(\Omega)$. On note $(X_i)_{i\geq 0}$ les projections canoniques : pour $\omega \in \Omega$, on a $X_i(\omega) = \omega_i$. On peut alors définir une filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ en posant $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, X_1, \dots, X_n)$ pour tout $n \geq 0$, .

Pour k entier supérieur ou égal à -1, on note

$$\mathbb{P}^k = \delta_k \otimes (\frac{1}{3}\delta_{(-2)} + \frac{1}{3}\delta_{(-1)} + \frac{1}{3}\delta_1)^{\otimes \mathbb{N}^*}.$$

Ainsi, sous la loi $\mathbb{P}^k$, $X_0 = k$ et $(X_n)_{n\geq 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées avec

$$\forall n \geq 1 \quad \mathbb{P}^k(X_n = -2) = \mathbb{P}^k(X_n = -1) = \mathbb{P}^k(X_n = 1) = \frac{1}{3}.$$

Par ailleurs, on notera $\mathbb{E}^k$ l'intégrale par rapport à la mesure de probabilités $\mathbb{P}^k$.

On pose $S_0 = X_0$ ainsi que, pour tout $n \geq 1$,

$$S_n = X_0 + \sum_{i=1}^n X_i.$$

Dans ce problème, on s'intéressera au point où la suite $(S_n)_{n\geq 0}$ sort de l'ensemble des nombres strictement positifs. À cet effet, on définit

$$T = \inf\{n \geq 0 : \quad S_n \leq 0\}.$$

On pose enfin $Y_n = S_{n\wedge T}$.

Partie I

Dans toute cette partie, k est un entier supérieur ou égal à -1 fixé.

1. Pour tout $n \geq 0$, calculer l'espérance et la variance de S_n sous $\mathbb{P}^k$.
2. Montrer que $(Y_n)_{n\geq 0}$ prend ses valeurs dans $[-1, +\infty[\cap\mathbb{Z}$.
3. En déduire que $|Y_n| \leq 1 + \max(S_n, 0)$.
4. Montrer que T est un temps d'arrêt adapté à la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$.
5. Montrer les identités suivantes, qui seront très utiles dans le problème :

$$\forall n \geq 0 \quad Y_{n+1} - Y_n = 1\!\!1_{\{T>n\}} X_{n+1} = 1\!\!1_{\{Y_n>0\}} X_{n+1}.$$

6. Montrer que $(Y_n)_{n\geq 0}$ est une sur-martingale adaptée à la filtration $\mathcal{F}_n$.

7. Soit x un réel positif. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \mathbb{P}^k(S_n - k \geq x) \leq \frac{14n}{(3x+2n)^2}.$$

8. En déduire l'existence d'une constante C telle que $\mathbb{E}^k \max(S_n - k, 0) \leq C$ pour tout $n \geq 0$.
9. Montrer, à l'aide du théorème de Doob, qu'il existe une variable aléatoire réelle Y_∞ telle que $(Y_n)_{n\geq 0}$ converge $\mathbb{P}^k$ presque sûrement vers Y_∞.
10. En déduire que T est presque sûrement fini.
    Indication : on pourra utiliser le fait que $(Y_n)_{n\geq 0}$ prend ses valeurs dans un ensemble discret.
11. Retrouver les résultats des deux dernières questions à l'aide de la loi forte des grands nombres.
12. Montrer que sous $\mathbb{P}^k$, $(Y_n)_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov à valeurs dans $[-1, +\infty[\cap\mathbb{Z}$ dont la matrice de passage vérifie

$$\begin{cases} p_{-1,-1} = 1 \\ p_{0,0} = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}^* \quad p_{n,n+1} = p_{n,n-1} = p_{n,n-2} = \frac{1}{3} \end{cases}$$

et démarrant au point k.

Partie II

On a montré dans la dernière question de la partie I que pour tout $k \in [-1, +\infty[\cap\mathbb{Z}$, $(Y_n)_{n\geq 0}$ est, sous la loi $\mathbb{P}^k$, une chaîne de Markov commençant en k, la dynamique restant la même quel que soit k. Le but de cette deuxième partie est donc, en utilisant des techniques de chaînes de Markov, de comprendre l'influence du point initial sur le comportement asymptotique de la chaîne. On remarquera que la notation $\mathbb{P}^k$ utilisée ci-dessus est compatible avec les conventions usuelles pour l'écriture des chaînes de Markov.

1. On pose, pour $k \in [-1, +\infty[\cap\mathbb{Z}$: $u_k = \mathbb{P}^k(Y_\infty = 0)$. Montrer que

$$\forall k \geq 1 \quad u_k = \frac{u_{k+1} + u_{k-1} + u_{k-2}}{3}. \qquad (1)$$

Que valent u_0 et u_{-1} ?
2. On note E l'espace vectoriel formé par les suites réelles $(v_k)_{k\geq -1}$ qui vérifient la récurrence (1). Soit x un réel non nul. À quelle condition sur x la suite $(x^k)_{k\geq -1}$ est-elle dans E ? Vérifier que $x = 1$ satisfait cette condition. Montrer que E est un espace vectoriel de dimension 3 dont on donnera une base.
3. On note V le sous-espace vectoriel de E formé par les suites bornées de E. Montrer que V est un espace vectoriel de dimension 2 dont on donnera une base.
4. Montrer que

$$\forall k \geq -1 \quad \mathbb{P}^k(Y_\infty = 0) = \frac{1 - (1-\sqrt{2})^{k+1}}{\sqrt{2}}.$$

5. Pour $k \geq -1$ entier, déterminer la loi de Y_∞ sous $\mathbb{P}^k$.

FIN