Université d'Orléans **Licence de Mathématiqu**

Unité MA 6.06

Mesure et Probabilités

corrigé du devoir en temps libre n° 2

Problème

1. Les variables aléatoires $(X_i^*)_{i\geq 1}$ sont deux à deux indépendantes, car elles sont fabriquées à partir des variables aléatoires $(X_i)_{i\geq 1}$ qui sont elles mêmes deux à deux indépendantes. On a donc

$$\begin{aligned}
\text{Var } S_n^* &= \sum_{i=1}^n \text{Var } X_i^* \\
&\leq \sum_{i=1}^n \mathbb{E}\ (X_i^*)^2 \\
&\leq \sum_{i=1}^n \mathbb{E}\ X_i^2 1\!\!1_{X_i\leq i} \\
&\leq \sum_{i=1}^n \mathbb{E}\ X_1^2 1\!\!1_{X_1\leq n} \\
&= n\mathbb{E}\ X_1^2 1\!\!1_{X_1\leq n}
\end{aligned}$$

2. On a pour tout n $|u_n - \beta^n| \leq 1$. Comme β^n tend vers l'infini, on a $u_n - \beta^n = o(\beta^n)$, soit $u_n \sim \beta^n$. $\frac{1}{u_n} \sim \beta^{-n}$ et que la série à termes positifs β^{-n} est convergence, on a l'équivalence des restes :

$$\sum_{n=N}^{+\infty} \frac{1}{u_n} \sim \sum_{n=N}^{+\infty} \beta^{-n} = (1-\beta^{-1})^{-1}\beta^{-N} \sim (1-\beta^{-1})^{-1}\frac{1}{u_N}.$$

3. La suite $u_N = \sum_{n=N}^{+\infty} \frac{1}{u_n}$ converge lorsque N tend vers l'infini, elle est donc bornée par une constante C.

4.

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty}\text{Var }Q^*_{u_n} &= \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{u_n^2}\text{Var }S^*_{u_n}\\ &\le \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{u_n^2}u_n\text{Var }\mathbb{E}\ X_1^2 1\!\!1_{\{X_1\le u_n\}}\\ &\le \mathbb{E}\ X_1^2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{u_n}1\!\!1_{\{X_1\le u_n\}}\end{aligned}$$

Mais on peut remarquer que l'on a

$$\mathbb{E}\ X_1^2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{u_n}1\!\!1_{\{X_1\le u_n\}} = \mathbb{E}\ X_1^2\sum_{n:u_n\ge X_1}\frac{1}{u_n}$$

5. On en déduit que

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty}\text{Var }Q^*_{u_n} &\le \mathbb{E}\ X_1^2\frac{C}{u_{\inf\{n\in\mathbb{N};u_n\ge X_1\}}}\\ &\le \mathbb{E}\ X_1^2\frac{C}{X_1}\\ &\le C\mathbb{E}\ X_1<+\infty\end{aligned}$$

6. Soit $\epsilon>0$ quelconque. D'après l'inégalité de Tchebitchef, on a $P(|Q^*_{u_n}-\mathbb{E}\ Q^*_{u_n}|\ge\epsilon)\le\frac{\text{Var }Q^*_{u_n}}{\epsilon^2}$. D'après la question précédente, on peut donc affirmer que la série de terme général $P(|Q^*_{u_n}-\mathbb{E}\ Q^*_{u_n}|\ge\epsilon)$ est convergente. D'après le lemme de Borel-Cantelli, on peut donc dire que

$$P(\limsup_{n\to+\infty}\{|Q^*_{u_n}-\mathbb{E}\ Q^*_{u_n}|\ge\epsilon\})=0,$$

ceci pour ϵ strictement positif quelconque. D'après le critère fondamental de convergence presque sûre, on peut affirmer que

$$Q^*_{u_n}-\mathbb{E}\ Q^*_{u_n}\to 0\text{ p.s.}$$

7. $\mathbb{E}\ X_n^*=\mathbb{E}\ X_n 1\!\!1_{\{X_n\le n\}}=\mathbb{E}\ X_1 1\!\!1_{\{X_1\le n\}}$, car X_1 et X_n ont même loi. Comme la suite $(X_1 1\!\!1_{\{X_1\le n\}})_{n\ge1}$ converge en croissant vers X_1, le théorème de convergence monotone permet d'affirmer que $\mathbb{E}\ X_n^*=\mathbb{E}\ X_n 1\!\!1_{\{X_n\le n\}}=\mathbb{E}\ X_1 1\!\!1_{\{X_1\le n\}}$ converge vers $\mathbb{E}\ X_1$.

8. $\mathbb{E}\ Q_n^* = \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^n \mathbb{E}\ X_n^*\right)$. D'après la question précédente $\mathbb{E}\ X_n^*$ converge vers $\mathbb{E}\ X_1$, donc d'après le théorème de Césaro, les moyennes convergent également vers $\mathbb{E}\ X_1$.
9. On a $Q_{u_n}^* - \mathbb{E}\ X_1 = \left(Q_{u_n}^* - \mathbb{E}\ Q_{u_n}^*\right) + \left(\mathbb{E}\ Q_{u_n}^* - \mathbb{E}\ X_1\right)$ $(\mathbb{E}\ Q_{u_n})$ est une sous-suite d'une suite (déterministe) qui converge vers $\mathbb{E}\ X_1$, donc elle converge aussi vers $\mathbb{E}\ X_1$. Comme $Q_{u_n}^* - \mathbb{E}\ Q_{u_n}^*$ tend vers 0 presque sûrement et que la convergence presque sûre est compatible avec la somme, on en déduit que $Q_{u_n}^*$ tend presque sûrement vers $\mathbb{E}\ X_1$.
10. $P(X_n \neq X_n^*) = P(X_n > n) = P(X_1 > n)$. Pour tout $n \geq 0$, on a $P(X_1 > n) \leq \int_{]n-1,n]} P(X > t)\ d\lambda(t)$. Ainsi

$$\sum_{n=1}^{+\infty} P(X_n \neq X_n^*) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(X_1 > n) \leq \int_{]0,+\infty[} P(X > t)\ d\lambda(t) = \mathbb{E}\ X < +\infty$$

11. Ainsi, d'après le lemme de Borel-Cantelli, $P(\limsup_{n\to+\infty}\{X_n \neq X_n^*)\}) = 0$ ce qui équivaut à $P(\liminf_{n\to+\infty}\{X_n = X_n^*)\}) = 1$: pour presque tout ω, on a $\omega \in \{X_n = X_n^*)\}$ dès que $n \geq n_0(\omega)$, c'est à dire que les suites $(X_n(\omega))$ et $(X_n^*(\omega))$ coincident à partir du rang $n_0(\omega)$.
12. Pour presque tout ω, on peut écrire dès que $u_n \geq n_0(\omega)$

$$Q_{u_n} - \mathbb{E}\ X_1 = \frac{S_{u_{n_0-1}} - S^*_{u_{n_0-1}}}{u_n} + \left(Q_{u_n} - \mathbb{E}\ X_1^*\right)$$

Bien sûr, $\frac{S_{u_{n_0-1}} - S^*_{u_{n_0-1}}}{u_n}$ tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini. Quant au deuxième terme, il tend presque sûrement vers zéro.

Détaillons le raisonnement : si $\omega \in \liminf_{n\to+\infty}\{X_n = X_n^*)\} \cap \{Q_{u_n}^* \to \mathbb{E}\ X_1\}$, alors $\omega \in \{Q_{u_n} \to \mathbb{E}\ X_1\}$. Comme l'intersection de deux ensembles de mesure 1 est un ensemble de mesure 1, on en déduit que $P(Q_{u_n} \to \mathbb{E}\ X_1) = 1$, soit

$$Q_{u_n} \to \mathbb{E}\ X_1 \text{ p.s.}$$

13. Comme on fait des sommes de termes positifs, on a $S_{u_n} \leq S_k \leq S_{u_{n+1}}$. On en déduit

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} Q_{u_n} \leq \frac{u_n}{k} Q_{u_n} \leq Q_k \leq \frac{u_{n+1}}{k} Q_{u_{n+1}} \leq \frac{u_{n+1}}{u_n} Q_{u_{n+1}}.$$

14. Si n_k désigne la partie entière du logarithme de n en base β, on a

$$\frac{u_{n_k}}{u_{n_k+1}} Q_{u_{n_k}} \leq Q_k \leq \frac{u_{n_k+1}}{u_{n_k}} Q_{u_{n_k+1}}$$

Comme $\lim_{k\to+\infty} \frac{u_{n_k}}{u_{n_k+1}} = \frac{1}{\beta} > 0$ et $\lim_{k\to+\infty} \frac{u_{n_k+1}}{u_{n_k}} = \beta > 0$, on en déduit

$$\frac{1}{\beta}\mathbb{E}\ X_1 \leq \liminf_{k\to+\infty} Q_k \leq \limsup_{k\to+\infty} Q_k \leq \beta\mathbb{E}\ X_1 \text{ p.s.}$$

15. On note

$$\Omega_\beta = \{\omega \in \Omega; \frac{1}{\beta}\mathbb{E}\ X_1 \leq \liminf_{k\to+\infty} Q_k(\omega) \leq \limsup_{k\to+\infty} Q_k(\omega) \leq \beta\mathbb{E}\ X_1\}.$$

On a montré à la question précédente que pour tout $\beta > 1$, $P(\Omega_\beta = 1$. En particulier $\forall n \geq 1 \quad P(\Omega_{1+1/n}) = 1)$. Comme l'intersection d'une famille dénombrable d'événements de probabilités un et de probabilité un, on a bien

$$P(\bigcap_{n=1}^{+\infty} \Omega_{1+1/n}) = 1.$$

16. Soit $\omega \in \bigcap_{n=1}^{+\infty} \Omega_{1+1/n}$. On a pour tout $n \geq 1$

$$\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\mathbb{E}\ X_1 \leq \liminf_{k\to+\infty} Q_k(\omega) \leq \limsup_{k\to+\infty} Q_k \leq \big(1+\frac{1}{n}\big)\mathbb{E}\ X_1$$

En faisant tendre n vers l'infini, on obtient

$$\mathbb{E}\ X_1 \leq \liminf_{k\to+\infty} Q_k(\omega) \leq \limsup_{k\to+\infty} Q_k \leq \mathbb{E}\ X_1,$$

soit $\lim_{k\to+\infty} Q_k(\omega) = \mathbb{E}\ X_1$. Comme $P(\bigcap_{n=1}^{+\infty} \Omega_{1+1/n}) = 1$, on a bien

$$\lim_{k\to+\infty} Q_k = \mathbb{E}\ X_1 \text{ p.s.}$$

17. Si $(X_n)_{n\geq 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées, on peut poser $X_n^+ = \max(0, X_n)$ et $X_n^- = \max(0, -X_n)$: on a $X_n = X_n^+ - X_n^-$. Ainsi

$$\frac{1}{n}\big(\sum_{k=1}^n X_k\big) = \frac{1}{n}\big(\sum_{k=1}^n X_k^+\big) - \frac{1}{n}\big(\sum_{k=1}^n X_k^-\big)$$

Le théorème montré à la question précédente (loi des grands nombres pour des suites de variables aléatoires positives intégrables deux à deux indépendantes identiquement distribuées) s'applique aux deux termes de la différence, de sorte que $\frac{1}{n}\big(\sum_{k=1}^n X_k\big)$ converge preque sûrement vers $\mathbb{E}\ X_1^+ - \mathbb{E}\ X_1^- = \mathbb{E}\ X_1$.

FIN