Université d'Orléans **Licence de Mathématiques**

Unité MA 6.06

Mesure et Probabilités

Devoir en temps libre n° 2

à rendre pour le 20 mars 2003

Problème

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires positives de même loi deux à deux indépendantes, admettant un moment d'ordre un. On pose

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \text{ et } Q_n = \frac{1}{n} S_n.$$

On considère également les variables aléatoires tronquées : $X_i^* = X_i \mathbb{1}_{\{X_i \leq i\}}$ et les sommes et quotients associés : $S_n^* = \sum_{i=1}^n X_i^*$ et $Q_n^* = S_n^*/n$.

1. Montrer
$$\text{Var } S_n^* \leq \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\ (X_i^*)^2.$$
En déduire
$$\text{Var } S_n^* \leq n\mathbb{E}\ X_1^2 \mathbb{1}_{\{X_1 \leq n\}}.$$
2. Soit $\beta > 1$. On note u_n l'entier le plus proche de β^n. Montrer $u_n \sim \beta^n$. En déduire
$$\sum_{n=N}^{+\infty} \frac{1}{u_n} = O(\frac{1}{u_N}).$$
3. Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que
$$\forall N \geq 1 \quad \sum_{n=N}^{+\infty} \frac{1}{u_n} \leq C \frac{1}{u_N}.$$

4. Montrer
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \text{Var } Q^*_{u_n} \leq \mathbb{E}\ X_1^2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{u_n} \mathbb{1}_{\{X_1 \leq u_n\}},$$
puis
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \text{Var } Q^*_{u_n} \leq \mathbb{E}\ X_1^2 \sum_{n: u_n \geq X_1} \frac{1}{u_n}$$
5. En déduire que
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \text{Var } Q^*_{u_n} < +\infty.$$
6. Montrer que
$$Q^*_{u_n} - \mathbb{E}\ Q^*_{u_n} \to 0 \text{ p.s.}$$
7. Montrer que
$$\lim_{n \to +\infty} \mathbb{E}\ Y_n = \mathbb{E}\ X_1.$$
8. Montrer que $\lim \mathbb{E}\ Q^*_n = \mathbb{E}\ X_1$. (Indication : on pourra utiliser le théorème de Césaro)
9. En déduire que
$$Q^*_{u_n} \to \mathbb{E}\ X_1 \text{ p.s.}$$
10. Montrer que la série de terme général $P(X_n \neq X^*_n)$ converge.
11. A l'aide du lemme de Borel-Cantelli, montrer que pour presque tout ω, il existe un $n_0(\omega)$ tel que les suites $(X_n(\omega))$ et $(X^*_n(\omega))$ coincident à partir du rang $n_0(\omega)$.
12. Montrer que
$$Q_{u_n} \to \mathbb{E}\ X_1 \text{ p.s.}$$
13. Si $u_n \leq k \leq u_{n+1}$, montrer que
$$\frac{u_n}{u_{n+1}} Q_{u_n} \leq Q_k \leq \frac{u_{n+1}}{u_n} Q_{u_{n+1}}.$$
14. En déduire que
$$\frac{1}{\beta}\mathbb{E}\ X_1 \leq \liminf_{k \to +\infty} Q_k \leq \limsup_{k \to +\infty} Q_k \leq \beta \mathbb{E}\ X_1 \text{ p.s}$$

15. On note
$$\Omega_\beta = \{\omega \in \Omega; \frac{1}{\beta}\mathbb{E}\ X_1 \leq \liminf_{k\to+\infty} Q_k(\omega) \leq \limsup_{k\to+\infty} Q_k(\omega) \leq \beta\mathbb{E}\ X_1\}.$$
Montrer que
$$P(\bigcap_{n=1}^{+\infty} \Omega_{1+1/n}) = 1.$$

16. Montrer que
$$\lim_{k\to+\infty} Q_k = \mathbb{E}\ X_1 \text{ p.s.}$$

17. Montrer que le résultat de la dernière question demeure vrai si l'on ne suppose plus que les (X_n) sont des variables positives.

FIN