



Mesure et Probabilités

Corrigé du devoir I

Exercice I

1. A_n est fini, donc $P(A_n) = \sum_{(k,l) \in A_n} P(\{k, l\})$. Pour tout $(k, l) \in A_n$, on a $P(\{k, l\}) = \frac{1}{\zeta(2)} \frac{1}{(k+p+1)^3} = \frac{1}{\zeta(2)} \frac{1}{(n+1)^3}$. On a donc finalement $P(A_n) = |A_n| \frac{1}{\zeta(2)} \frac{1}{n^3} = (n+1) \frac{1}{\zeta(2)} \frac{1}{n^3}$. Les $(A_n)_{n \geq 0}$ forment une partition de Ω . On a donc

$$P(\Omega) = \sum_{n \geq 1} P(A_n) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{\zeta(2)} \frac{1}{n^3} = 1.$$

Ainsi P est une mesure de probabilité.

2. $P(X = k, Y = p) = \frac{1}{\zeta(2)} \frac{1}{(k+p+1)^3}$.
3. Les événements $(Y = p)_{p \geq 0}$ forment une partition de Ω . On a donc

$$P(X = k) = \sum_{p=0}^{+\infty} P(X = k, Y = p) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{\zeta(2)} \frac{1}{(k+p+1)^3} = \frac{1}{\zeta(2)} \sum_{n=k+1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}.$$

On reconnaît le reste d'une série de Riemann. Posons $v_n = \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{2(n+1)^2}$. Il est facile de voir que (v_n) est à termes positifs, avec $v_n \sim \frac{1}{n^3}$, qui est le terme général d'une série convergente. Ainsi, les restes sont équivalents:

$$\sum_{n=k+1}^{+\infty} \frac{1}{n^3} \sim \sum_{n=k+1}^{+\infty} v_n = \frac{1}{2(k+1)^2},$$

car la série est de forme télescopique. On a donc

$$P(X = n) \sim \frac{1}{2} \frac{1}{n^2}.$$

4. Raisonnons par l'absurde: supposons que X et Y sont indépendantes. Alors, pour tout n , on a $P(X = n, Y = n) = P(X = n)P(Y = n)$. D'après la question précédente, on a donc $P(X = n, Y = n) \sim \frac{1}{4} \frac{1}{n^4}$. Mais un calcul direct montre que

$$P(X = n, Y = n) = \frac{1}{\zeta(2)} \frac{1}{(2n+1)^3} \sim \frac{1}{8\zeta(2)} \frac{1}{n^3}.$$

En faisant le rapport des deux expressions et en faisant tendre n vers l'infini, on obtient une contradiction.

5. Les événements $\{X = k\}_{k \geq 0}$ forment une partition de Ω . On a donc

$$\begin{aligned}
 P(Y = rX - 1) &= \sum_{k=0}^{+\infty} P(Y = rX - 1, X = k) \\
 &= P(Y = -1, X = 0) + \sum_{k=1}^{+\infty} P(Y = rX - 1, X = k) \\
 &= \sum_{k=1}^{+\infty} P(Y = rX - 1, X = k) \\
 &= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\zeta(2)} \frac{1}{(k + rk - 1 + 1)^3} \\
 &= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\zeta(2)} \frac{1}{k^3 (r+1)^3} \\
 &= \frac{1}{\zeta(2)(r+1)^3} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^3} \\
 &= \frac{\zeta(3)}{\zeta(2)(r+1)^3}
 \end{aligned}$$

6. X divise $Y + 1$ si et seulement si il existe r entier relatif avec $Y + 1 = rX$. Mais comme $Y + 1$ est strictement positif et X positif, r est nécessairement un entier naturel non nul. Ainsi

$$\begin{aligned}
 P(X \text{ divise } Y+1) &= \sum_{r=1}^{+\infty} P(Y + 1 = rX) \\
 &= \sum_{r=1}^{+\infty} \frac{\zeta(3)}{\zeta(2)(r+1)^3} \\
 &= \frac{\zeta(3)}{\zeta(2)} \sum_{r=1}^{+\infty} \frac{1}{(r+1)^3} \\
 &= \frac{\zeta(3)}{\zeta(2)} (\zeta(3) - 1)
 \end{aligned}$$

Exercice II

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires de Bernoulli indépendantes de paramètre $1/2$. Par convention, on pose $X_0 = 0$. Pour $n \geq 1$, on pose $Y_n = X_n X_{n-1}$.

1. X_n et X_{n-1} sont dans $\{0, 1\}$, donc leur produit Y_n l'est aussi: Y_n suit une loi de Bernoulli de paramètre $P(Y_n = 1) = P(X_n = 1, X_{n-1} = 1) = P(X_n = 1)P(X_{n-1} = 1) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$. On utilise le fait que X_n et X_{n-1} sont indépendantes.

2. Par définition de Y_n , Y_n est $\sigma(X_{n-1}, X_n)$ -mesurable. Comme les (X_n) sont indépendantes, Y_i et Y_j sont dès lors indépendantes dès que $\{i-1, i\} \cap \{j-1, j\} = \emptyset$, ce qui est vrai dès que $|i-j| > 1$. Comme Y_i n'est pas constante Y_i n'est pas indépendante de Y_i . D'autre part $\mathbb{E}Y_i Y_{i+1} = \mathbb{E}X_{i-1} X_i^2 X_{i+1} = \mathbb{E}X_{i-1} X_i X_{i+1} = \frac{1}{8} \neq \mathbb{E}Y_i Y_{i+1} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4}$, ce qui achève de montrer la réciproque.

3. Si $p \geq n$

$$(\forall i \leq p \quad Y_i \neq 1) \implies (\forall i \leq n \quad Y_i \neq 1).$$

Ainsi $A_p \subset A_n$: la suite $(A_n)_{n \geq 1}$ est décroissante. Pour $n \geq 1$, on note A_n l'événement

$$A_n = \{\forall i \leq n \quad Y_i \neq 1\}.$$

4. On a clairement $A_{n+1} = A_n \cap \{Y_{n+1} \neq 1\}$, ou, de manière équivalente

$$A_{n+1} = A_n \cap \{X_n = 0 \text{ ou } X_{n+1} = 0\}.$$

On a $A_{n+1} \cap \{X_{n+1} = 0\} = A_n \cap \{X_{n+1} = 0\}$, d'où

$$u_{n+1} = P(A_{n+1} \cap \{X_{n+1} = 0\}) = P(A_n \cap \{X_{n+1} = 0\}).$$

Mais A_n est $\sigma(X_1, X_2, \dots, X_n)$ mesurable et les variables aléatoires X_1, \dots, X_{n+1} sont indépendantes. Donc les événements A_n et $\{X_{n+1} = 0\}$ sont indépendants: on a alors $P(A_n \cap \{X_{n+1} = 0\}) = P(A_n)P(X_{n+1} = 0) = \frac{1}{2}P(A_n)$. Comme $\{X_n = 0\}$ et $\{X_n = 1\}$ forment une partition de A_n , on a enfin

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}(P(A_n \cap \{X_{n+1} = 0\}) + P(A_n \cap \{X_{n+1} = 1\})) = \frac{1}{2}(u_n + v_n).$$

D'autre part

$$A_{n+1} \cap \{X_{n+1} = 1\} = A_n \cap \{X_n = 0\} \cap \{X_{n+1} = 1\}$$

Comme l'événement $A_n \cap \{X_n = 0\}$ est $\sigma(X_1, X_2, \dots, X_n)$ mesurable, on déduit comme précédemment que

$$v_{n+1} = P(A_{n+1}) = P(A_n \cap \{X_n = 0\})P(X_{n+1} = 1) = u_n \times \frac{1}{2},$$

ce qui achève de démontrer la formule de récurrence.

5. Par une récurrence classique, on en déduit

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

ou encore

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \frac{1}{2^n} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On a alors

$$P(A_n) = u_n + v_n = (1 \quad 1) \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \frac{1}{2^n} (u_n \quad v_n) = \frac{1}{2^n} (1 \quad 1) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Posons pour $n \geq 0$:

$$w_n = (1 \quad 1) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est diagonalisable, et ses valeurs propres sont les racines du polynôme caractéristique $X^2 - X - 1$. Il existe donc une matrice P inversible (même orthogonale si on veut) telle que

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & \bar{\gamma} \end{pmatrix} P^{-1},$$

d'où

$$w_n = (u_n \quad v_n) = \frac{1}{2^n} (1 \quad 1) P \begin{pmatrix} \gamma^n & 0 \\ 0 & \bar{\gamma}^n \end{pmatrix} P^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On en déduit l'existence de constantes C et D telles que

$$\forall n \geq 0 \quad w_n = C\gamma^n + D\bar{\gamma}^n,$$

où on a posé $\gamma = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\bar{\gamma} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

On a nécessairement $w_0 = 1 = C + D$ et $w_1 = 2 = C\gamma + D\bar{\gamma}$. Il s'ensuit

$$D = \frac{\gamma - 2}{\gamma - \bar{\gamma}} = \frac{\gamma - 2}{\sqrt{5}} = \frac{-3 + \sqrt{5}}{2\sqrt{5}} = \frac{-3\sqrt{5} + 5}{10} = \frac{-3\sqrt{5}}{10} + \frac{1}{2},$$

puis $C = 1 - D = \frac{3\sqrt{5}}{10} + \frac{1}{2}$.

Maintenant, on a $P(A_n) = \frac{1}{2^n} w_n$, d'où le résultat.

6. Posons $q_n = w_n / (C\gamma^n)$: on a $q_n = 1 + D(\frac{\bar{\gamma}}{\gamma})^n$. Comme $|\frac{\bar{\gamma}}{\gamma}| < 1$, $(\frac{\bar{\gamma}}{\gamma})^n$ tend vers 0, d'où

$$\begin{aligned} \ln P(A_n) &= n(-\ln 2 + \ln \gamma) + \ln C + \ln q_n \\ &= n(-\ln 2 + \ln \gamma) + \ln C + o(1) \\ &= n(-\ln 2 + \ln \gamma) + \ln C + O\left(\left(\frac{\bar{\gamma}}{\gamma}\right)^n\right) \end{aligned}$$

Il s'ensuit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln P(A_n) = -\ln 2 + \ln \gamma.$$

7. En utilisant l'indépendance des (Z_n) , on a

$$P(\forall i \leq n \quad Z_i \neq 1) = \left(\frac{3}{4}\right)^n,$$

d'où

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln P(\forall i \leq n \quad Z_i \neq 1) = \ln 3 - 2 \ln 2.$$

On constate alors que la limite obtenue diffère ($-\ln 2 + \ln \gamma \neq \ln 3 - 2 \ln 2$), alors que la différence de nature entre les deux suites ne paraissait pas évidente de prime abord. Cette différence est due au fait que, même si, pour chaque n , Y_n et Z_n ont même loi, la loi de la suite $(Y_n)_{n \geq 2}$ et celle de $(Z_n)_{n \geq 2}$ diffèrent.

FIN