Université d'Orléans **Licence de Mathématiques**

Unité MA 6.06

Mesure et Probabilités

Devoir en temps libre

à rendre pour le 13 février 2003

Exercice (court, mais pas guidé)

Par définition de la tribu engendrée par une variable aléatoire, tout événement de la tribu $\sigma(W)$ est de la forme $W^{-1}(B)$ avec $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. $W^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega; W(\omega) \in \Omega\}$, ce que l'on note usuellement de la manière plus commode $\{W \in B\}$.

Soit A' un événement $\mathcal{A}-mesurable$ et B un borélien

$$\begin{aligned}
P(A' \cap \{W \in B\}) &= P(A \cap A' \cap \{W \in B\}) + P(\overline{A} \cap A' \cap \{W \in B\}) \\
&= P(A \cap A' \cap \{U \in B\}) + P(\overline{A} \cap A' \cap \{V \in B\}) \\
&= P(A \cap A')P(U \in B) + P(\overline{A} \cap A')P(V \in B) \\
&= P(A \cap A')\mu(B) + P(\overline{A} \cap A')\mu(B) \\
&= (P(A \cap A') + P(\overline{A} \cap A'))\mu(B) \\
&= P(A')\mu(B)
\end{aligned}$$

En prenant $A' = \Omega$, on en déduit d'abord que $P(W \in B) = \mu(B)$ pour tout borélien B. μ est donc la loi de W sous P. En réinsérant dans la formule précédente, on a pour tout événement $\mathcal{A}-mesurable$ A' et pour tout borélien B :

$$P(A' \cap \{W \in B\}) = P(A')P(W \in B),$$

ce qui veut dire que W est indépendante de $\mathcal{A}$.

Problème (un peu plus long, mais guidé)

1. Y est une variable aléatoire à valeurs dans l'ensemble fini $\{1,\ldots,n\}$. Donc d'après le théorème de transfert,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}a_{k,Y} &= \sum_{i=1}^{n} P(Y=i)a_{k,i} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} a_{k,i} \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_{k,i} = L_k.
\end{aligned}$$

De même

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}a_{X,k} &= \sum_{i=1}^{n} P(X=i)a_{i,k} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} a_{i,k} \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_{i,k} = C_k.
\end{aligned}$$

2. (X,Y) est un vecteur aléatoire à valeurs dans l'ensemble fini $\{1,\ldots,n\}^2$. D'après le théorème de transfert, on a donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}a_{X,Y} &= \sum_{(i,j)\in\{1,\ldots,n\}^2} P((X,Y)=(i,j))a_{i,j} \\
&= \sum_{(i,j)\in\{1,\ldots,n\}^2} P(\{X=i\}\cap\{Y=j\})a_{i,j} \\
&= \sum_{(i,j)\in\{1,\ldots,n\}^2} P(X=i)P(Y=j)a_{i,j} \\
&= \sum_{(i,j)\in\{1,\ldots,n\}^2} \frac{1}{n}\times\frac{1}{n}\times a_{i,j}
\end{aligned}$$

Toujours d'après le théorème de transfert

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}L_X &= \sum_{i=1}^{n} P(X=i)L_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} L_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \times \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \times \frac{1}{n} \times a_{i,k} = Q
\end{aligned}$$

Bis repetita placet...

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}C_Y &= \sum_{k=1}^{n} P(Y=k)L_k \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} L_k \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \times \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_{i,k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \times \frac{1}{n} \times a_{i,k} = Q
\end{aligned}$$

3. Comme$\mathbb{1}_{\{X=k\}} L_X a_{X,Y} = \mathbb{1}_{\{X=k\}} L_k a_{k,Y}$, on a $\mathbb{E}\mathbb{1}_{\{X=k\}} L_X a_{X,Y} = \mathbb{E}\mathbb{1}_{\{X=k\}} L_k a_{k,Y}$. Comme L_k est une constante, on a $\mathbb{E}\mathbb{1}_{\{X=k\}} L_k a_{k,Y} = L_k \mathbb{E}\mathbb{1}_{\{X=k\}} a_{k,Y}$. De plus $\mathbb{1}_{\{X=k\}}$ est indépendante de $a_{k,Y}$. Donc, finalement

   $\mathbb{E}\mathbb{1}_{\{X=k\}} L_X a_{X,Y} = L_k \mathbb{E}\mathbb{1}_{\{X=k\}} \mathbb{E}a_{k,Y} = L_k \times P(X=k) L_k = P(X=k) L_k^2$

   D'autre part$\mathbb{1}_{\{X=k\}}(L_X)^2 = \mathbb{1}_{\{X=k\}}(L_k)^2$, donc comme L_k^2 est une constante $\mathbb{E}\mathbb{1}_{\{X=k\}}(L_X)^2 = \mathbb{E}\mathbb{1}_{\{X=k\}}(L_k)^2 = L_k^2 \mathbb{E}\mathbb{1}_{\{X=k\}} = L_k^2 P(X=k)$. On a donc bien

   $$\mathbb{E}\,\mathbb{1}_{\{X=k\}} L_X a_{X,Y} = \mathbb{E}\,\mathbb{1}_{\{X=k\}}(L_X)^2.$$

4. On somme l'égalité précédente pour k variant de 1 à n:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}1\!\!1_{\{X=k\}}L_X a_{X,Y} &= \sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}1\!\!1_{\{X=k\}}(L_X)^2\\ \mathbb{E}\sum_{k=1}^{n}1\!\!1_{\{X=k\}}L_X a_{X,Y} &= \mathbb{E}\sum_{k=1}^{n}1\!\!1_{\{X=k\}}(L_X)^2\\ \mathbb{E}\big(\sum_{k=1}^{n}1\!\!1_{\{X=k\}}\big)L_X a_{X,Y} &= \mathbb{E}\big(\sum_{k=1}^{n}1\!\!1_{\{X=k\}}\big)(L_X)^2\end{aligned}$$

Comme les événements $\{X=k\}$, pour k de 1 à n forment une partition de l'espace Ω, on a $1=\sum_{k=1}^{n}1\!\!1_{\{X=k\}}$. Finalement

$$\mathbb{E}L_X a_{X,Y}=\mathbb{E}(L_X)^2.$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a $\mathbb{E}L_X^2 \geq (\mathbb{E}L_X)^2=Q^2$, d'où $\mathbb{E}L_X a_{X,Y}\geq Q^2$.

5. La preuve de l'inégalité $\mathbb{E}C_Y a_{X,Y}\geq Q^2$ est complètement analogue à la preuve précédente , les rôles des lignes et des colonnes étant inversés.

6. Si ω est tel que $a_{X,Y}=1$, alors il n'y a rien a démontrer car les deux membres de l'inégalité

$$\big(\frac{L_X+C_Y}{2}-\alpha\big)(1-a_{X,Y})\geq 0.$$

sont nuls. Passons au cas où $a_{X,Y}=0$. On doit montrer

$$\frac{L_X+C_Y}{2}-\alpha\geq 0,$$

soit

$$n(L_X+C_Y)\geq 2n\alpha$$

Mais $n(L_X+C_Y)=\sum_{j=1}^{n}a_{X,j}+\sum_{i=1}^{n}a_{i,Y}$, et d'après l'hypothèse faite sur la matrice, cette somme est au moins égale à $n\alpha$ dès que $a_{X,Y}=0$. Ceci conclut l'étude du deuxième cas, et donc la preuve de l'inégalité

7. Une variable aléatoire positive a une espérance positive, donc

$$\mathbb{E}\big(\frac{L_X+C_Y}{2}-\alpha\big)(1-a_{X,Y})\geq 0.$$

On développe le produit:

$$\big(\frac{L_X+C_Y}{2}-\alpha\big)(1-a_{X,Y})=\big(\frac{L_X+C_Y}{2}-\alpha\big)-\frac{1}{2}\big(L_X a_{X,Y}+C_Y a_{X,Y}\big)+\alpha a_{X,Y}$$

On a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\big(\frac{L_X + C_Y}{2} - \alpha\big) &= \frac{1}{2}\big(EL_X + \mathbb{E}C_Y\big) - \mathbb{E}\alpha = \frac{1}{2}Q + Q - \alpha \\ &= Q - \alpha,\end{aligned}$$

$\mathbb{E}\alpha a_{X,Y} = \alpha\mathbb{E}a_{X,Y} = \alpha Q$ et

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\frac{1}{2}\big(L_X a_{X,Y} + C_Y a_{X,Y}\big) &= \frac{1}{2}\big(\mathbb{E}L_X a_{X,Y} + \mathbb{E}C_Y a_{X,Y}\big) \\ &\geq \frac{1}{2}(Q^2 + Q^2) = Q^2\end{aligned}$$

En additionnant les trois termes, on obtient $Q - \alpha - Q^2 + \alpha Q \geq 0$. Or $Q - \alpha - Q^2 + \alpha Q = Q - \alpha - Q(Q - \alpha) = (Q - \alpha)(1 - Q)$. Comme $Q = \mathbb{E}a_{X,Y}$ et que $a_{X,Y} \leq 1$, on a $Q \leq 1$. Si $Q < 1$, on peut conclure que $Q - \alpha \geq 0$, soit $Q \geq \alpha$.

Si $Q = 1$, on a nécessairement tous les coefficients de la matrice égaux à 1, car $Q = \frac{1}{n^2}\sum_{i,j} a_{i,j}$ et aucun coefficient ne dépasse un. On a alors $Q = 1 \geq \alpha$.

8. On a vu que $Q = \frac{1}{n^2}\sum_{i,j} a_{i,j}$. Comme $Q \geq \alpha$, on a

$$\sum_{i,j} a_{i,j} \geq \alpha n^2,$$

ce qu'il fallait démontrer.

FIN