Université d'Orléans **Licence de Mathématiques**

Unité MA 6.06

Mesure et Probabilités

Devoir en temps libre

à rendre pour le 13 février 2003

Exercice (court, mais pas guidé)

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace probabilisé et $\mathcal{A}$ une sous-tribu de $\mathcal{F}$. Soient U, V deux variables aléatoires de loi μ (sous P). On suppose que (sous P), U et V sont indépendantes de la tribu $\mathcal{A}$. Soit A un événement $\mathcal{A}$-mesurable. On définit W par

$$W(\omega) = \begin{cases} U(\omega) \text{ si } \omega \in A \\ V(\omega) \text{ si } \omega \notin A \end{cases}$$

Montrez que sous P, W suit la loi μ et W est indépendante de $\mathcal{A}$.
Autrement dit, il faut montrer que la tribu $\mathcal{A}$ est indépendante de la tribu $\sigma(W) = \{W^{-1}(B); B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$.

Tournez la page S.V.P.

Problème (un peu plus long, mais guidé)

Soit $1 \leq \alpha > 0$. Une matrice carrée d'ordre n $(a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ constituée uniquement de 0 et de 1 est telle que

$$(a_{i,j} = 0) \Longrightarrow (a_{i,1} + \cdots + a_{i,n} + a_{1,j} + \cdots + a_{n,j} \geq 2\alpha n).$$

On veut démontrer que la somme des éléments de la matrice est au moins égale à αn^2.

****

On pose pour $1 \leq k \leq n$:

$$C_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_{i,k} \text{ et } L_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_{k,i}.$$

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur $\{1, \ldots, n\}$.

1. Montrer que pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$, on a $\mathbb{E}a_{k,Y} = L_k$ et $\mathbb{E}a_{X,k} = C_k$.
2. On pose $Q = \mathbb{E}a_{X,Y}$. Montrer $Q = \mathbb{E}L_X = \mathbb{E}C_Y$.
3. Montrer que pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$, on a
$$\mathbb{E}\mathbb{1}_{\{X=k\}} L_X a_{X,Y} = \mathbb{E}\mathbb{1}_{\{X=k\}} (L_X)^2.$$
4. En déduire
$$\mathbb{E}L_X a_{X,Y} = \mathbb{E}(L_X)^2,$$
puis
$$\mathbb{E}L_X a_{X,Y} \geq Q^2.$$
5. Montrer que $\mathbb{E}C_Y a_{X,Y} \geq Q^2$.
6. Montrer
$$\Big(\frac{L_X + C_Y}{2} - \alpha\Big)(1 - a_{X,Y}) \geq 0.$$
7. En déduire $Q - \alpha - Q^2 + \alpha Q \geq 0$, puis $Q \geq \alpha$.
8. Conclure.

FIN