Université d'Orléans **Licence de Mathématiques**

Unité MA 6.06

Mesure et Probabilités

Examen du 11 juin 2004

durée 2h

Le polycopié de cours, les notes manuscrites, et les calculatrices sont autorisés.

Le sujet est constitué de deux problèmes indépendants.

Problème I

Soit Y une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$. On note ϕ_Y sa fonction caractéristique. On fabrique une variable aléatoire Z à partir de Y: Z est choisi au hasard de manière uniforme entre 0 et $Y-1$. Ainsi, on suppose que

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall k \in \{0, \ldots, n-1\} \quad P(Z=k|Y=n) = \frac{1}{n}.$$

1. Montrer que

$$\forall t \in \mathbb{R}\backslash 2\pi\mathbb{Z} \quad \mathbb{E}\big(e^{itZ} \mathbb{1}_{\{Y=n\}}\big) = \frac{1}{n} \frac{1-e^{int}}{1-e^{it}} P(Y=n).$$

   Indication: on pourra remarquer et prouver que

$$e^{itZ} \mathbb{1}_{\{Y=n\}} = \sum_{k=0}^{n-1} e^{ikt} \mathbb{1}_{\{Z=k, Y=n\}}.$$

2. On note ϕ_Z la fonction caractéristique de Z. Montrer que

$$\forall t \in \mathbb{R}\backslash 2\pi\mathbb{Z} \quad \phi_Z(t) = \frac{i}{e^{it}-1} \int_0^t \phi_Y(x)\, dx.$$

3. On suppose que Y admet un moment d'ordre 1. Montrer que Z admet un moment d'ordre 1, puis que $\mathbb{E}Z = \frac{\mathbb{E}Y-1}{2}$.
   Indication: on pourra remarquer et prouver que

$$\phi_Z(t) - 1 = \frac{i}{e^{it}-1} \int_0^t \left(\phi_Y(x) - e^{ix}\right) dx.$$

4. Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi géométrique de paramètre p, avec $p \in]0,1[$. On pose $Y = X_1 + X_2 - 1$. Montrer que la fonction caractéristique de Y vérifie

$$\forall t \in \mathbb{R} \backslash 2\pi\mathbb{Z} \quad \phi_Y(t) = \frac{p^2 e^{it}}{(1-(1-p)e^{it})^2}.$$

5. Montrer que dans ce cas, $Z+1$ suit la loi géométrique de paramètre p.

Problème II

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant la loi exponentielle de paramètre λ. On pose $S_0 = 0$ et, pour $n \geq 1$,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k.$$

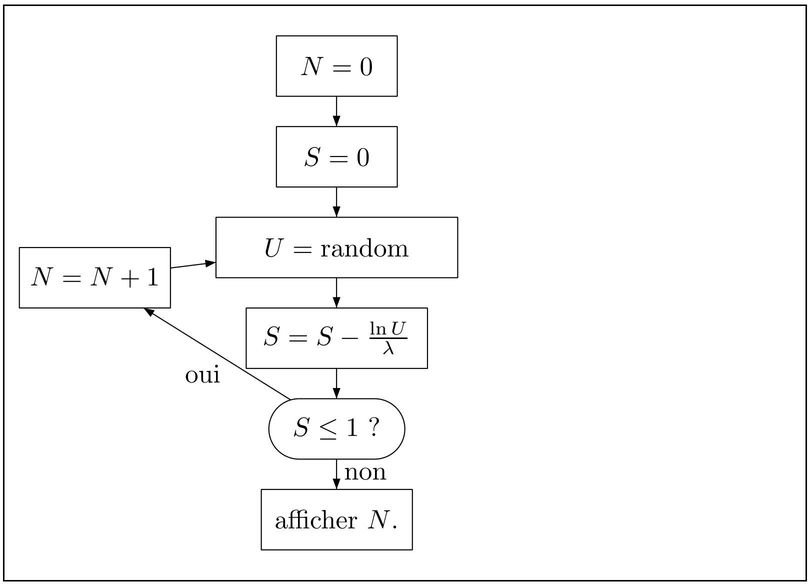
Pour $t > 0$, on définit

$$N_t = \sup\{n \geq 0; S_n \leq t\}.$$

1. (a) Montrer que pour tout entier positif ou nul n, les variables aléatoires S_n et X_{n+1} sont indépendantes.
   (b) Montrer que pour tout entier n strictement positif, la variable aléatoire S_n suit une loi gamma $\Gamma(n, \lambda)$.
   (c) Montrer que pour tout réel $t > 0$ et tout entier n positif ou nul, on a $\{N_t > n\} = \{S_{n+1} \leq t\}$.
   (d) Soit $n \geq 1$. Montrer que $P(S_n \leq t) = g_n(\lambda t)$, où on a posé

   $$g_n(t) = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^t x^{n-1} e^{-x} \, dx.$$

   (e) Montrer que $g_{n+1}(t) = -\frac{1}{\Gamma(n+1)} e^{-t} t^n + g_n(t)$.
   (f) Montrer que $P(N_t = n) = P(S_n \leq t) - P(S_{n+1} \leq t)$.
   (g) Montrer que pour tout $t > 0$ N_t suit une loi de Poisson de paramètre λt.
2. (a) Soit U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[0, 1]$ et $\lambda > 0$. On pose $Y = -\frac{\ln U}{\lambda}$. Montrer que Y suit la loi exponentielle de paramètre λ.
   (b) Que fait le programme informatique suivant ?



On admet que chaque appel à la fonction random génère un nombre suivant la loi uniforme sur $[0, 1]$ se fait indépendamment des précédents.

3. On pourra admettre sans démonstration le résultat d'analyse suivant: si $(u_n)_{n\geq 0}$ est une suite telle que pour le réel $\lambda > 0$ on ait $u_n \sim \lambda n$, alors

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{\sup\{n \geq 0; u_n \leq t\}}{t} = \frac{1}{\lambda}.$$

   (a) Montrer que $(\frac{S_n}{n})_{n\geq 1}$ converge presque sûrement et déterminer sa limite.

   (b) Montrer que $\frac{N_t}{t}$ converge presque sûrement et déterminer sa limite.

FIN