Université d'Orléans **Licence de Mathématiques**

Unité MA 6.06

Mesure et Probabilités

Examen du 26 juin 2003

durée 2h

Le polycopié de cours, les notes manuscrites, et les calculatrices sont autorisés.

Le sujet est constitué de trois exercices indépendants. Tout résultat donné dans l'énoncé peut être admis pour traiter les questions suivantes.

Exercice 1

1. Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$. Par la méthode de votre choix, montrer que $\mathbb{E}X^4 = 3$.
2. Montrer que $\mathbb{E}(1+X)^4 = 10$.
3. Quelle est la loi de $1+X$?
4. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant la loi $\mathcal{N}(1,1)$. Montrer que la suite
$$\frac{X_1^4 + \cdots + X_n^4}{n}$$
converge presque sûrement et déterminer sa limite

Exercice 2

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes, où X suit la loi exponentielle de paramètre 2 et Y la loi exponentielle de paramètre 1. On pose $P = X(X+Y)$ et $S = 2X+Y$.

1. On pose
$$\Delta = \{(p,s) \in]0,+\infty[^2; 0 < p < \frac{s^2}{4}\}.$$
Montrer que l'application T définie par $T(x,y) = (x(x+y), 2x+y)$ réalise un C^1-difféomorphisme de $]0,+\infty[^2$ dans Δ, dont la réciproque est
$$T^{-1}(p,s) = (\frac{1}{2}(s - \sqrt{s^2-4p}), \sqrt{s^2-4p}).$$

(On remarquera que si $p = x(x+y)$ et $s = 2x + y$, alors $s^2 - 4p = y^2$.)

2. Montrer que le vecteur aléatoire (P, S) admet la densité

$$(p, s) \mapsto \frac{2}{\sqrt{s^2 - 4p}} e^{-s} \, \mathbb{1}_\Delta(p, s).$$

3. En déduire que S suit la loi gamma $\Gamma(2, 1)$.
4. Quelle est la loi de 2X ? Retrouver sans calcul le résultat de la question précédente.

Exercice 3

Pour tout entier n non nul, on considère une suite $(X_k^n)_{1 \leq k \leq n}$ de variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur l'ensemble fini $\{1, \ldots, n\}$.

1. On pose pour $n \geq 1$,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{\{X_k^n = k\}}.$$

   Quelle est la loi de S_n ? Montrer que la suite $(S_n)_{n \geq 1}$ converge en loi et déterminer sa limite.
2. Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. On construit un endomorphisme aléatoire A_n défini par

$$\forall k \in \{1, \ldots, n\} \quad A_n e_k = e_{X_k^n}.$$

   Quelle est la loi de tr A_n ? Montrer $\lim_{n \to +\infty} P(\text{tr } A_n = 0) = \frac{1}{e}$.

FIN