Université d'Orléans **Licence de Mathématiques**

UNIVERSITE D'ORLEANS

Unité MA 6.06

Mesure et Probabilités

Examen du 28 avril 2003

durée 2h

Le polycopié de cours, les notes manuscrites, et les calculatrices sont autorisés.

Le sujet est constitué de deux exercices et d'un problème indépendants. Tout résultat donné dans l'énoncé peut être admis pour traiter les questions suivantes.

Exercice 1

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur l'ensemble $\{2, 3, 4\}$.

1. Calculer $\mathbb{E} \ln X_1$.
2. On pose
$$Q_n = X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n.$$
Montrer que
$$\lim_{n\to+\infty} Q_n^{1/n} = 2\sqrt[3]{3} \text{ p.s.}$$

Exercice 2

Soit (X, Y) un vecteur aléatoire de $\mathbb{R}^2$ suivant la loi uniforme sur le disque unité :
$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; \quad \sqrt{x^2 + y^2} \leq 1\}.$$

On définit la variable aléatoire $R = \sqrt{X^2 + Y^2}$.
Déterminer un réel r tel que $P(R > r) = P(R < r)$.
(On aura tout intérêt à faire un dessin).

Problème

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes telles que l'on ait :

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad P(X_k = 1) = P(X_k = -1) = \frac{1}{2}.$$

On pose pour $n \geq 1$,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k.$$

Pour $z \in \mathbb{C}$, on pose $g(z) = \mathbb{E}e^{zX_1}$

1. (a) Montrer que pour tout nombre complexe z, on a

   $$g(z) = \cosh z$$

   (b) Calculer la fonction caractéristique de X_1, puis la fonction caractéristique de $-X_1$.

   (c) Montrer que S_n et $-S_n$ ont même loi.

2. Montrer que pour tout réel u, on a

   $$g(u) \leq \exp \frac{u^2}{2}.$$

   (On pourra utiliser un développement en série entière.)

3. Soit n un entier strictement positif et $\alpha > 0$.

   (a) Montrer que

   $$\forall u \in \mathbb{R}_+ \quad P(S_n \geq n\alpha) \leq \frac{g(u)^n}{e^{n\alpha u}}$$

   (b) En déduire que

   $$P(S_n \geq n\alpha) \leq \exp(-n\frac{\alpha^2}{2}).$$

   (c) Montrer soigneusement que

   $$P(|S_n| \geq n\alpha) \leq 2\exp(-n\frac{\alpha^2}{2}).$$

4. (a) Montrer que quels que soient les réels $\gamma > 0$ et $\delta > 0$, la série de terme général $(\exp(-\delta n^\gamma))_{n\geq 0}$ converge.

   (b) Soit $\beta > \frac{1}{2}$. Montrer que

   $$\lim_{n\to+\infty} \frac{S_n}{n^\beta} = 0 \text{ presque sûrement.}$$

FIN