Université d'Orléans **Licence de Mathématiques**

Unité MA 6.06

Mesure et Probabilités

Examen partiel du 10 mars 2004

durée 1h30

1. Pour $x \in \mathbb{R}$, on note $s(x)$ le plus petit entier strictement supérieur à x. (Ainsi par exemple $s(\pi) = 4$). Soit X une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. Montrer que la variable aléatoire $Y = s(X)$ suit une loi géométrique de paramètre $1 - e^{-\lambda}$.

2. Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathcal{N}(2004, 1/2)$. On pose $Y = (-2)^X$. Calculer $\mathbb{E}Y$.

3. Soit λ et μ deux réels strictement positifs; X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur $[0, 1]$. On pose $U = \frac{X}{Y}$.
   (a) Calculer la loi du vecteur (U, Y).
   (b) Montrer que U admet la densité
   $$f_U(u) = \frac{1}{2} \min(1, u^{-2}) \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(u). \tag{1}$$
   (c) Calculer $P(U > 1)$ à partir de (1).
   (d) Retrouver $P(U > 1)$ par un calcul direct sur la loi de (X, Y).
   (e) Montrer que U et $1/U$ ont même loi.
   (f) Question subsidiaire: donner un exemple de variable aléatoire intégrable V telle que V et $1/V$ aient même loi.

4. Soit $M = (X, Y)$ un vecteur aléatoire suivant la loi uniforme sur le disque centré en l'origine et de rayon 1. Calculer $P(X > \frac{\sqrt{2}}{2})$.

FIN