Université d'Orléans **Licence de Mathématiques**

Unité MA 6.06

Mesure et Probabilités

Examen partiel du 13 mars 2003

durée 1h30

1. Soit X une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre $2/3$. On pose $Y = \exp(X)$. Montrer que Y admet un moment d'ordre 1 et calculer $\mathbb{E}Y$.

2. Soit λ et μ deux réels strictement positifs; X et Y deux variables aléatoires indépendantes, avec $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$ et $Y \sim \mathcal{E}(\mu)$. On pose $U = \frac{X}{Y}$.
   (a) Calculer la loi du vecteur (U, Y).
   (b) Montrer que U admet la densité
   $$f_U(u) = \frac{\lambda\mu}{(\lambda u + \mu)^2} 1\!\!1_{\mathbb{R}_+}(u). \tag{1}$$
   (c) Calculer $P(U > 1)$ à partir de (1).
   (d) Retrouver $P(U > 1)$ par un calcul direct sur la loi de (X, Y).

3. Soit X une variable aléatoire positive telle que
   $$\forall t \in]0, +\infty[\quad P(X > t) \leq \frac{2003}{t^3}. \tag{2}$$
   (a) Montrer que X admet un moment d'ordre 1.
   (b) Montrer que X admet un moment d'ordre 2.
   (c) Construire un exemple de variable aléatoire positive vérifiant (2) et telle que $\mathbb{E}X^3 = +\infty$.

4. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur $[-1, 1]$. On pose $R = \sqrt{X^2 + Y^2}$.
   Montrer que $P(R < 1) = \frac{\pi}{4}$.

FIN