Université d'Orléans **Deug MASS, MIA**

Unité MA 3.03

Probabilités et Graphes

Devoir en temps libre

A rendre dans la semaine du 6 au 10 octobre 2003

Montrons d'abord par récurrence sur n la propriété

$$(H_n) : \exists k \in \mathbb{N} \quad \exists i \text{ impair positif} n = 2^k i.$$

(H_1) est vraie car $1 = 2^0 \times 1$ et 1 est impair.

Pour $n \geq 2$, montrons maintenant $(H_k)_{1 \leq k < n} \Longrightarrow (H_n)$. Si n est impair, il n'y a rien a démontrer, car $n = 2^0 \times n$. Si n est pair, on peut écrire $n = 2m$, avec m entier naturel non nul. Evidemment $m < n$, donc H_m est vraie: il existe k naturel et i impair avec $m = 2^k i$. Mais maintenant $n = 2m = 2^{k+1}i$, ce qui montre que (H_n) est vérifiée

Reste avoir l'unicité. Supposons $n = 2^k i = 2^l j$, avec k, l entiers naturels rt i, j positifs impairs. On peut supposer que $k \geq l$: on a alors $2^{k-l} i = j$. Pour que le produit de deux nombres entiers soit impair, il faut que les deux nombres soient impairs, ainsi 2^{k-l} doit être impair, ce qui impose $k = l$, d'où l'on déduit $i = j$.

1. La question préliminaire a montré que les ensembles

$$\{(2k+1)2^i; i \geq 0\}$$

formaient une partition de $\mathbb{N}^*$. On en déduit que leurs intersections avec I forment une partition de I.

2. A_k est formé des termes de la suite géométrique de premier terme $2k+1$ et de raison 2 qui sont inférieurs au sens large à n. Comme cette suite est croissante, l'un de ses termes est inférieur au sens large à n si et seulement si son premier terme l'est plus,*i.e.* si et seulement si $2k+1 \leq n$, soit $k \leq \frac{n-1}{2}$. Dans notre cas particulier, ce sont donc les entiers de 0 à

En $\frac{16-1}{2} = 7$. On a

$$\begin{array}{rcl} A_0 & = & \{1,2,4,8,16\} \\ A_1 & = & \{3,6,12\} \\ A_2 & = & \{5,10\} \\ A_3 & = & \{7,14\} \\ A_4 & = & \{9\} \\ A_5 & = & \{11\} \\ A_6 & = & \{13\} \\ A_7 & = & \{15\} \end{array}$$

3. $A_k \cap M \subset M$, donc $2(A_k \cap M) \subset 2M$. Alors $(A_k \cap M) \cap 2(A_k \cap M) \subset M \cap 2M$. Mais par définition de M, un élément de $2M$ ne peut être dans M, donc $M \cap 2M = \varnothing$ et donc $A_k \cap M$ et $2(A_k \cap M)$ sont disjoints.

4. Si $A_k \neq \varnothing$, on peut écrire
$$A_k = \{(2k+1)2^0, (2k+1)2^1, \ldots, (2k+1)2^{m_k}\}$$
et
$$2A_k = \{(2k+1)2^1, (2k+1)2^2, \ldots, (2k+1)2^{m_k+1}\},$$
de sorte que le plus grand élément x_k de A_k en est l'unique élément dont le double ne soit pas dans A_k. On a donc $2A_k \subset A_k \cup \{x_k\}$.

   $A_k \cap M \subset M$, donc $2(A_k \cap M) \subset 2M$. De même $2(A_k \cap M) \subset 2A_k \subset A_k \cup \{x_k\}$. Ainsi
$$2(A_k \cap M) \subset (A_k \cup \{x_k\}) \cap 2M \subset (A_k \cap 2M) \cup \{x_k\}.$$

5. Si ϕ est une injection, c'est une bijection de X dans $\phi(X)$ donc $|X| = |\phi(X)|$. Ainsi
$$\begin{array}{rcl} |M \cap A_k| & = & |2(M \cap A_k)| \\ & \leq & |A_k \cap 2M| + |\{x_k\}| \\ & \leq & |A_k \cap 2M| + 1 \end{array}$$
Évidemment, cette inégalité demeure valide si $A_k = \varnothing$. Mais pour des ensembles J inclus dans I, $P(J) = \frac{1}{n}|J|$, ce qui est bien le cas pour $A_k \cap M$ et $A_k \cap 2M$, qui sont inclus dans A_k, donc dans I. En divisant par n, on obtient donc
$$P(M \cap A_k) \leq P(A_k \cap 2M) + \frac{1}{n},$$
d'où
$$2P(M \cap A_k) \leq P(A_k \cap M) + P(A_k \cap 2M) + \frac{1}{n}.$$

Comme M et $2M$ sont disjoints, $A_k \cap M$ et $A_k \cap 2M$, le sont aussi, donc

$$P(A_k \cap M) + P(A_k \cap 2M) = P((A_k \cap M) \cup (A_k \cap 2M)) = P(A_k \cap (M \cup 2M)) \leq P(A_k),$$

puis

$$2P(A_k \cap M) \leq P(A_k) + \frac{1}{n},$$

soit

$$nP(M \cap A_k) \leq \frac{1}{2}(nP(A_k) + 1),$$

ce qui est équivalent à

$$nP(M \cap A_k) \leq \text{En } (\frac{1}{2}(nP(A_k) + 1))$$

car $nP(M \cap A_k) = \text{Card } (M \cap A_k)$ est un nombre entier.

6. À k fixé, l'application

$$i \mapsto (2k+1)2^i$$

est injective. Par suite, le cardinal de A_k est le nombre d'entiers $i \geq 0$ vérifiant $(2k+1)2^i \in I$, soit $1 \leq (2k+1)2^i \leq n$. L'inégalité de gauche est toujours vérifiée pour $i \geq 0$ et $k \geq 0$. D'autre part

$$\begin{aligned} (2k+1)2^i \leq n \quad &\Longleftrightarrow \quad 2^i \leq n/(2k+1) \\ &\Longleftrightarrow \quad i \ln 2 \leq \ln n - \ln(2k+1) \\ &\Longleftrightarrow \quad i \leq \frac{\ln n - \ln(2k+1)}{\ln 2}, \end{aligned}$$

ce qui est équivalent à

$$i \leq \text{En } (\frac{\ln n - \ln(2k+1)}{\ln 2})$$

car i est entier. Card A_k est donc le nombre d'entiers vérifiant $0 \leq i \leq \text{En } (\frac{\ln n - \ln(2k+1)}{\ln 2})$, c'est à dire $1 + \text{En } (\frac{\ln n - \ln(2k+1)}{\ln 2})$. On a donc

$$P(A_k) = \frac{1}{n}(1 + \text{En } (\frac{\ln n - \ln(2k+1)}{\ln 2})).$$

La preuve de

$$P(A'_k) = \frac{1}{n}(1 + \text{En } (\frac{\ln n - \ln(2k+1)}{\ln 4}))$$

est analogue.

7. $\frac{1}{2}(nP(A_k) + 1) = 1 + \frac{1}{2}\text{En } (\frac{\ln n - \ln(2k+1)}{\ln 2})$.
Il s'ensuit que $\text{En } \frac{1}{2}(nP(A_k)+1) = 1 + \text{En } \frac{1}{2}\text{En } (\frac{\ln n - \ln(2k+1)}{\ln 2})$. En utilisant l'identité $\text{En } (\frac{1}{2}(\text{En } (2x))) = \text{En } (x)$ pour $x = \frac{\ln n - \ln(2k+1)}{\ln 4}$, on a alors

En $\frac{1}{2}(nP(A_k)+1) = 1+\text{En}\ (\frac{\ln n - \ln(2k+1)}{2\ln 2}) = nP(A'_k)$. D'après la question 4, on a alors

$$P(M \cap A_k) \leq \frac{1}{n}(\text{En}\ \frac{1}{2}(nP(A_k)+1) = P(A'_k).$$

8. Il est facile de voir que $\forall k \in \mathbb{N} \quad A'_k \subset A_k$. Ainsi, pour $k \neq l$, on a $A'_k \cap A'_l \subset A_k \cap A_l = \varnothing$. Les A'_k sont donc disjoints et l'on a

$$P(E) = \sum_{k\geq 0} P(A'_k)$$

Comme $M \subset I$ et que les A_k forment une partition de I, les $A_k \cap M$ forment une partition de M et l'on a

$$P(M) = \sum_{k\geq 0} P(A_k \cap M)$$

Comme on a montré que pour tout $k \geq$, on a $P(M \cap A_k) \leq P(A'_k)$, l'inégalité $P(M) \leq P(E)$ s'ensuit.

9. Comme $A'_k \subset A_k$, A'_k est vide dès que A_k est vide. Dressons la liste des éléments de A'_k lorsque A'_k est non-vide. On a

$$\begin{array}{rcl} A'_0 & = & \{1,4,16\} \\ A'_1 & = & \{3,12\} \\ A'_2 & = & \{5\} \\ A'_3 & = & \{7\} \\ A'_4 & = & \{9\} \\ A'_5 & = & \{11\} \\ A'_6 & = & \{13\} \\ A'_7 & = & \{15\} \end{array}$$

Alors Card $E = \sum_{k\geq 0}$ Card $A'_k = 3+2+1+1+1+1+1+1 = 11$ et

$$P(M) \leq P(E) = \frac{\text{Card } E}{\text{Card } I} = \frac{11}{16}.$$

Si l'on montre que l'ensemble E vérifie la propriété

$$\forall x \in E \quad 2x \notin E$$

il sera alors clair que l'égalité est possible

Soit $x \in E$: $\exists! k \in \mathbb{N} \quad x \in A'_k$. On peut alors écrire $x = (2k+1)2^{2k}$, d'où $v_2(x) = 2k$ – rappelons que $v_2(x)$ est l'exposant associé à 2 dans la décomposition de x en produit de facteurs premiers . Il est donc clair que pour tout $x \in E$, $v_2(x)$ est pair. D'autre part, tout $y \in 2E$ s'écrit sous la forme $y = 2x$ pour un certain $x \in E$, donc sous la forme $y = (2k+1)2^{2k+1}$, pour un certain $k \in \mathbb{N}$. Il s'ensuit que $v_2(y) = 2k+1$ est impair. Donc aucun entier ne peut être simultanément dans E et $2E$;E vérifie la propriété désirée.

10. Le raisonnement que nous avons fait à la question précédente ne dépendant pas de n: le meilleur majorant est donc toujours $P(E)$. On a

$$\begin{aligned} E &= \cup_{k\in\mathbb{N}}\{(2k+1)2^{2i}; i \geq 0\} \cap I \\ &= \{(2k+1)2^{2i}; i \geq 0; k \geq 0\} \cap I \\ &= \cup_{i\in\mathbb{N}}\{(2k+1)2^{2i}; k \geq 0\} \cap I \end{aligned}$$

On a donc la décomposition $E = \cup_{i\in\mathbb{N}} B_i$, avec

$$B_i = \{(2k+1)2^{2i}; k \geq 0\} \cap I.$$

Card B_i = Card $\{k \in \mathbb{N}; 0 \leq k \leq \frac{n2^{-2i}-1}{2}\}$ = En $\frac{n2^{-2i}-1}{2} + 1$ = En $(\frac{1}{2} + \frac{n}{2^{2i+1}})$ Comme $B_i = \{x \in I; v_2(x) = 2i\}$, les B_i sont disjoints et l'on a

$$P(E) = \frac{\text{Card } E}{\text{Card } I} = \frac{1}{n}\sum_{i\in\mathbb{N}} \text{Card } B_i = \frac{1}{n}\sum_{i\in\mathbb{N}} \text{En } (\frac{1}{2} + \frac{n}{2^{2i+1}}).$$

FIN