Université d'Orléans **Deug MASS, MIAS et SM**

Unité MA 3.03

Probabilités et Graphes

Examen partiel du 15 décembre 2003

durée: 2h

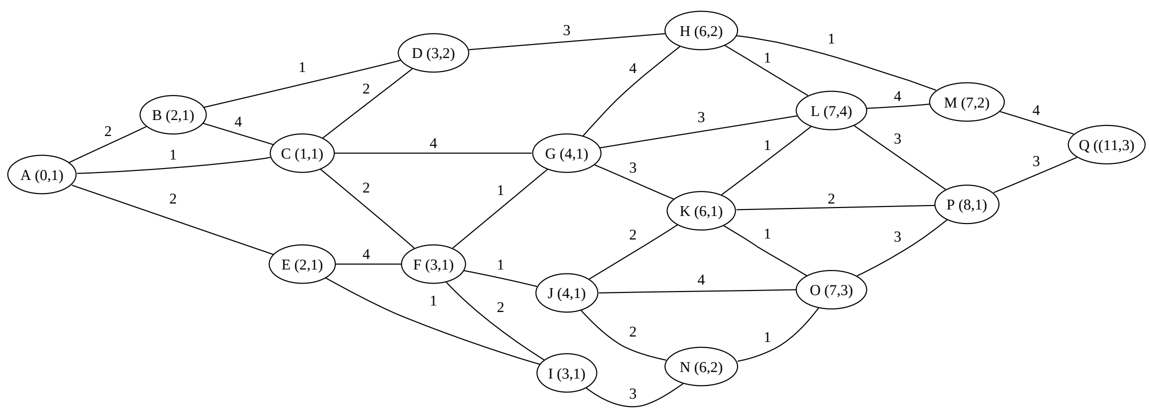
Le polycopié de cours, les notes manuscrites, et les calculatrices sont autorisés.

Le sujet est constitué de deux exercices et d'un problème indépendants.

Par commodité d'écriture, on écrit parfois $P(A, B)$ à la place de $P(A \cap B)$.
Ces deux expressions sont équivalentes.

Exercice I

Le dessin ci-dessous donne pour chaque point la distance à A, suivi du nombre le chemins de longueur minimale.



Exercice II

1. Notons C_x l'ensemble des parties de X contenant x. Il n'est pas difficile de voir que l'application $A \mapsto A \backslash \{x\}$ réalise une bijection de C_x dans

$\mathcal{B}(X\backslash\{x\})$, d'application réciproque $B \mapsto B \cup \{x\}$. On en déduit que $|C_x| = |\mathcal{B}(X\backslash\{x\})| = 2^{X\backslash\{x\}|} = 2^{n-1}$.

2. On a vu en cours que s réalisait une bijection de P_f^2 dans $\mathbb{N}$. On a noté p la bijection réciproque.

   Soit $u \in \{0, 1, \dots, 2^n - 1\}$: il est facile de voir que pour tout x dans $p(u)$, on a $x \leq \sum_{y \in p(u) y} = u$. Ainsi $x \leq 2^n - 1$. Mais comme x est une puissance de deux, on a $x \leq 2^{n-1}$. Ainsi $p(u) \in \mathcal{P}(P_n)$. On en déduit $p(\{0, 1, \dots, 2^n - 1\}) \subset \mathcal{P}(P_n)$. Comme p est une bijection, on a $|p(\{0, 1, \dots, 2^n - 1\})| = |\{0, 1, \dots, 2^n - 1\}| = 2^n$. D'autre part $|\mathcal{P}(P_n)| = 2^n$. Quand un ensemble fini est inclus dans un ensemble de même cardinal, ils sont égaux: $p(\{0, 1, \dots, 2^n - 1\}) = \mathcal{P}(P_n)$, ce qui est équivalent à dire que $\{0, 1, \dots, 2^n - 1\} = s(\mathcal{P}(P_n))$, donc la restriction de la bijection s à s à $\mathcal{P}(P_n)$ induit une bijection de $\mathcal{P}(P_n)$ dans $\{0, 1, \dots, 2^n - 1\}$.

3. On cherche les $m \in \{0, \dots, 2^n - 1\}$ tels que $2^k \in p(m)$. Mais d'après la question précédente $m \in \{0, \dots, 2^n - 1\}$ si et seulement si $p(m) \in \mathcal{P}(P_n)$. Ainsi, on cherche les m tels que $p(m) \in \mathcal{P}(P_n)$ et $2^k \in p(m)$. Comme p est une bijection, cela revient à chercher les A tels que $A \in \mathcal{P}(P_n)$ et $2^k \in A$. Comme $2^k \in P_n$, il y a d'après la première question 2^{n-1} tels ensembles A, donc 2^{n-1} tels entiers m.

4. Remarquons que tout entier x est somme digitale des éléments de $p(x)$. Si on décompose chaque entier de 0 à $2^n - 1$ comme somme digitale de puissance de deux, on vois que chaque puissance de deux de la forme 2^k, avec $0 \leq k < n$ apparaît 2^{n-1} fois dans la somme totale. Mais pour $n \geq 2$, 2^{n-1} est pair; ainsi comme la somme digitale de deux nombres égaux est nulle, on en déduit que la somme digitale totale est nulle.

5. (a) Il y a en tout $1 + 2 + \cdots + 16 = (16 \times 17)/2 = 136$ pions sur la table, donc comme on en enlève au moins un par coup, la partie dure au plus 120 coups.

   (b) La somme digitale des nombres de 1 à $2^4 - 1 = 15$ fait 0, d'après la question précédente, donc la somme digitale des nombres de 16 fait 16 qui est non nulle: le joueur qui commence n'est donc pas dans le noyau. S'il enlève le tas de hauteur 16, le second joueur est alors dans une position où la somme digitale des hauteurs des tas fait 0, donc il est bien dans le noyau.

Problème

Un responsable informatique d'une PME veut convaincre un décideur de remplacer un système d'exploitation propriétaire peu stable par une solution libre. L'argument utilisé ici est la fréquence du gel d'une application.

Le décideur répond au responsable de lui transmettre chaque jour le temps entre le boot du matin et le premier gel d'application, et lui affirme que l'on procédera au changement si lorsqu'il reviendra, le responsable pourra lui affirmer qu'une application a planté moins d'une minute avant son lancement.

Pour chaque $n \geq 1$, on note X_n la durée mesurée le n-ième jour. On note T le jour où le décideur a le temps de se pencher sur le problème.

On suppose que les $(X_n)_{n\geq 1}$ sont des variables aléatoires indépendantes suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. On suppose que T suit une loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$ et est indépendante de $(X_n)_{n\geq 1}$.

On pose, pour tout $n \geq 1$: $m_n = \min(X_1, \dots, X_n)$.

On note

$$G = m_T$$

la plus courte durée avant gel constatée jusqu'au retour du décideur.

Question préliminaire: soit F_X la fonction de répartition d'une variable aléatoire X. On suppose que $F_X(0) = 0$, que F_X est continue sur $[0, +\infty[$ et dérivable sur $]0, +\infty[$. Montrer que X admet la densité $f_X(x) = -F'_X(x)\mathbb{1}_{]0,+\infty[}(x)$.

Notons $g(x) = -F'_X(x)\mathbb{1}_{]0,+\infty[}(x)$. On doit montrer que

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \int_{-\infty}^{t} g(x)\ dx = F_X(t). \tag{1}$$

Voyons le cas $t < 0$: comme F_X est une fonction de répartition, elle est croissante positive. Comme elle est de plus nulle en zéro, elle est nulle en t. D'autre part il est évident que $\int_{-\infty}^{t} g(x)\ dx = 0$ pour $t < 0$, car g est nulle sur $\mathbb{R}_-$. Ainsi (1) est vérifiée pour $t < 0$.

Pour $t \geq 0$, on a

$$F_X(t) = F_X(t) - F_X(0) = \int_0^t F'_X(x)\ dx = \int_{-\infty}^{t} g(x)\ dx,$$

ce qui achève la preuve.

1. (a) Dire que le plus petit élément d'une famille finie est strictement supérieur à t, c'est dire que chacun des éléments de cette famille est est strictement supérieur à t, d'où l'identité

$$\{m_n > t\} = \cap_{i=1}^{n}\{X_i > t\}.$$

   (b) m_n est le plus petit nombre dans une famille de nombre positifs. Il s'ensuit que $F_{m_n}(t) = P(M_n \leq t) = 0$ pout t strictement négatif. Soit donc $t \geq 0$: $F_{m_n}(t) = P(M_n \leq t) = 1 - P(M_n > t)$.

$$\begin{aligned} P(m_n > t) &= P(\cap_{i=1}^{n}\{X_i > t\}) \\ &= \prod_{i=1}^{n} P(X_i > t), \end{aligned}$$

car les X_i sont indépendants. Pour tout i, on a

$$P(X_i > t) = \int_t^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x}\, dx = e^{-\lambda t}.$$

Il s'ensuit que $P(m_n > t) = (e^{-\lambda t})^n = e^{-n\lambda t}$.

(c) Il est facile de voir que F_{M_n} vérifie les hypothèses de la question préliminaire. m_n admet ainsi la densité $1\!\!1_{\mathbb{R}_+}(x)e^{-\lambda n x}$, ce qui signifie que m_n suit une loi exponentielle dont on déterminera de paramètre $n\lambda$.

2. (a) La famille $(T = k)_{k\geq 1}$ forme une partition de l'espace. Il s'ensuit

$$\begin{aligned} P(G > t) &= \sum_{k=1}^{+\infty} P(G > t, T = k) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} P(m_T > t, T = k) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} P(m_k > t, T = k) \end{aligned}$$

(b) m_k est fabriqué à partir des X_i, qui sont indépendantes de T, donc m_k est indépendante de T. Il s'ensuit:

$$\begin{aligned} P(G > t) &= \sum_{k=1}^{+\infty} P(m_k > t, T = k) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} P(m_k > t)P(T = k) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} e^{-\lambda k t} p(1-p)^{k-1}. \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} P(G > t) &= pe^{-\lambda t} \sum_{k=1}^{+\infty} e^{-\lambda(k-1)t}(1-p)^{k-1} \\ &= pe^{-\lambda t} \sum_{k=1}^{+\infty} (e^{-\lambda t}(1-p))^{k-1} \\ &= pe^{-\lambda t} \sum_{i=0}^{+\infty} (e^{-\lambda t}(1-p))^{i} \\ &= \frac{pe^{-\lambda t}}{1-(1-p)e^{-\lambda t}}. \end{aligned}$$

3. (a) En $+\infty$, on a $P(G > t) \sim \frac{pe^{-\lambda t}}{1}$, qui est évidemment négligeable devant t.

   (b) C'est une conséquence immédiate de la question préliminaire et de la question précédente.

   (c) Comme G a une densité qui est nulle sur $\mathbb{R}_-$, on a

$$\mathbb{E}X = \int_0^{+\infty} f_X(t)\ dt.$$

   Soit $A > 0$

$$\int_0^A tf_X(t)\ dt = [t(1 - F_X(t)]_0^A + \int_0^A (1 - F_X(t))\ dt,$$

   soit

$$\int_0^A tf_X(t)\ dt = AP(X > A) + \int_0^A P(X > t)\ dt.$$

   Comme $P(X > A)$ est négligeable devant A, on obtient, en faisant tendre A vers $+\infty$:

$$\mathbb{E}X \int_0^{+\infty} tf_X(t)\ dt = \int_0^{+\infty} P(X > t)\ dt.$$

   (d)

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}X &= \int_0^{+\infty} P(X > t)\ dt \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{p}{\lambda(1 - (1 - p)e^{-\lambda t})} \lambda e^{-\lambda t}\ dt \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{p}{\lambda(1 - (1 - p)u)}\ du \\
&= \frac{-p}{\lambda(1 - p)} [\ln(1 - (1 - p)u)]_0^1 \\
&= \frac{-p \ln p}{\lambda(1 - p)} \\
&= \frac{-p \ln p}{1 - p} \frac{1}{\lambda}
\end{aligned}$$

   (e) En 1 $\ln p$ est équivalent à $p - 1$et p à 1 donc $\frac{-p \ln p}{1-p} \frac{1}{\lambda} \sim \frac{1}{\lambda}$. $\mathbb{E}G$ tend donc vers $\frac{1}{\lambda}$, ce qui est l'espérance d'une loi exponentielle de paramètre λ, ce qui est logique, car si $p = 1$, alors $T = 1$ presque sûrement, donc $m_T = X_1$.

FIN DE L'ÉPREUVE