Université d'Orléans **Deug MASS, MIAS et SM**

Unité MA 3.03

Probabilités et Graphes

Examen du 15 décembre 2003

durée: 2h

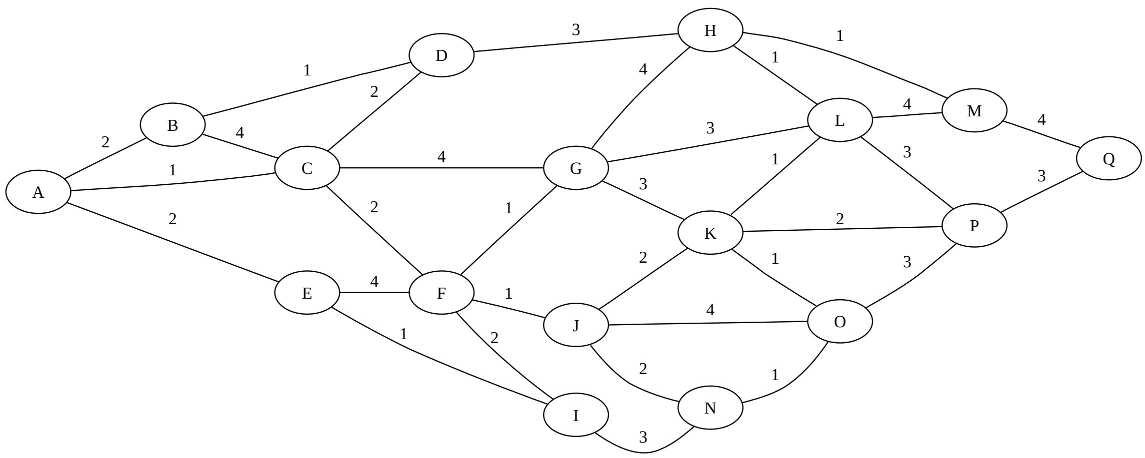
Le polycopié de cours, les notes manuscrites, et les calculatrices sont autorisés.

Le sujet est constitué de deux exercices et d'un problème indépendants.

Par commodité d'écriture, on écrit parfois $P(A, B)$ à la place de $P(A \cap B)$.
Ces deux expressions sont équivalentes.

Exercice I

Pour chaque sommet du graphe ci-dessous, donner la longueur du plus cours chemin du point A à ce sommet. Combien y a t'il de chemins de longueur minimale allant de A à L ? En donner un.



On pourra répondre en partie sur la feuille Annexe que l'on joindra à la copie.

Exercice II

1. Soit X un ensemble de cardinal $n > 0$ et x un élément de X. Combien y a t'il d'ensembles $A \subset X$ qui contiennent x ? (Pour vérifier votre réponse: pour $n = 3$, on doit trouver 4.)

2. On note $P_n = \{2^i; 0 \leq i < n\}$. Montrer que l'application

$$\begin{aligned} s : \mathcal{P}(P_n) &\to \mathbb{N} \\ B &\mapsto \sum_{x \in B} x \end{aligned}$$

   réalise une bijection de P_n dans $\{0, 1, \ldots, 2^n - 1\}$.
   Indication: ne réinventez pas la roue, utilisez le cours !

3. Montrer que tout $k \in \{0, \ldots, n-1\}$, il existe exactement 2^{n-1} nombres entiers m entre 0 et $2^n - 1$ tels que 2^k apparaisse dans la décomposition de m en une somme de puissances de deux.

4. En déduire que pour $n \geq 2$, la somme digitale des entiers de 0 à $2^n - 1$ est nulle.
   Indication: on rappelle que pour les puissances de deux distinctes, leur somme digitale coincide avec leur somme. On rappelle aussi que la somme digitale est associative et commutative.

5. On joue au jeu de Nim classique (appelé dans le cours *Fan Tan*). Il y a au début de la partie un tas de hauteur 1, un tas de hauteur 2, un tas de hauteur 3,..., un tas de hauteur 16.

   (a) Montrer que la partie se joue en au plus 136 coups.

   (b) Montrer que le joueur qui commence a une stratégie gagnante. Quelle doit être son premier coup s'il veut être assuré de gagner ?

Problème

Un responsable informatique d'une PME veut convaincre un décideur de remplacer un système d'exploitation propriétaire peu stable par une solution libre. L'argument utilisé ici est la fréquence du gel d'une application.

Le décideur répond au responsable de lui transmettre chaque jour le temps entre le boot du matin et le premier gel d'application, et lui affirme que l'on procédera au changement si lorsqu'il reviendra, le responsable pourra lui affirmer qu'une application a planté moins d'une minute avant son lancement.

Pour chaque $n \geq 1$, on note X_n la durée mesurée le n-ième jour. On note T le jour où le décideur a le temps de se pencher sur le problème.

On suppose que les $(X_n)_{n \geq 1}$ sont des variables aléatoires indépendantes suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. On suppose que T suit une loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$ et est indépendante de $(X_n)_{n \geq 1}$.

On pose, pour tout $n \geq 1$: $m_n = \min(X_1, \ldots, X_n)$.
On note
$$G = m_T$$
la plus courte durée avant gel constatée jusqu'au retour du décideur.

Question préliminaire: soit F_X la fonction de répartition d'une variable aléatoire X. On suppose que $F_X(0) = 0$, que F_X est continue sur $[0, +\infty[$ et dérivable sur $]0, +\infty[$. Montrer que X admet la densité $f_X(x) = F'_X(x)\mathbb{1}_{]0,+\infty[}(x)$.

1. (a) Soit t un réel quelconque. Justifier, par une phrase en français, l'identité
$$\{m_n > t\} = \cap_{i=1}^n \{X_i > t\}.$$
   (b) Montrer que la fonction de répartition de m_n vérifie
$$F_{m_n}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 - \exp(-\lambda n t) & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$
   (c) Montrer que m_n suit une loi exponentielle dont on déterminera le paramètre.

2. (a) Soit $t > 0$. Montrer
$$P(G > t) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(m_k > t, T = k).$$
   (b) En déduire
$$P(G > t) = \sum_{k=1}^{+\infty} p(1-p)^{k-1} e^{-\lambda k t}.$$
   (c) Montrer que
$$\forall t > 0 \quad P(G > t) = \frac{p e^{-\lambda t}}{1 - (1-p)e^{-\lambda t}}.$$

3. (a) Montrer qu'en $+\infty$, on a $P(G > t) = o(1/t)$.
   (b) Montrer que la variable aléatoire G admet la densité f_G définie par
$$f_G(t) = \frac{p\lambda e^{\lambda t}}{(e^{\lambda t} - (1-p))^2}\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(t).$$
   (c) A l'aide d'une intégration par parties, montrer soigneusement que
$$\mathbb{E}X = \int_0^{+\infty} P(G > t)\ dt.$$

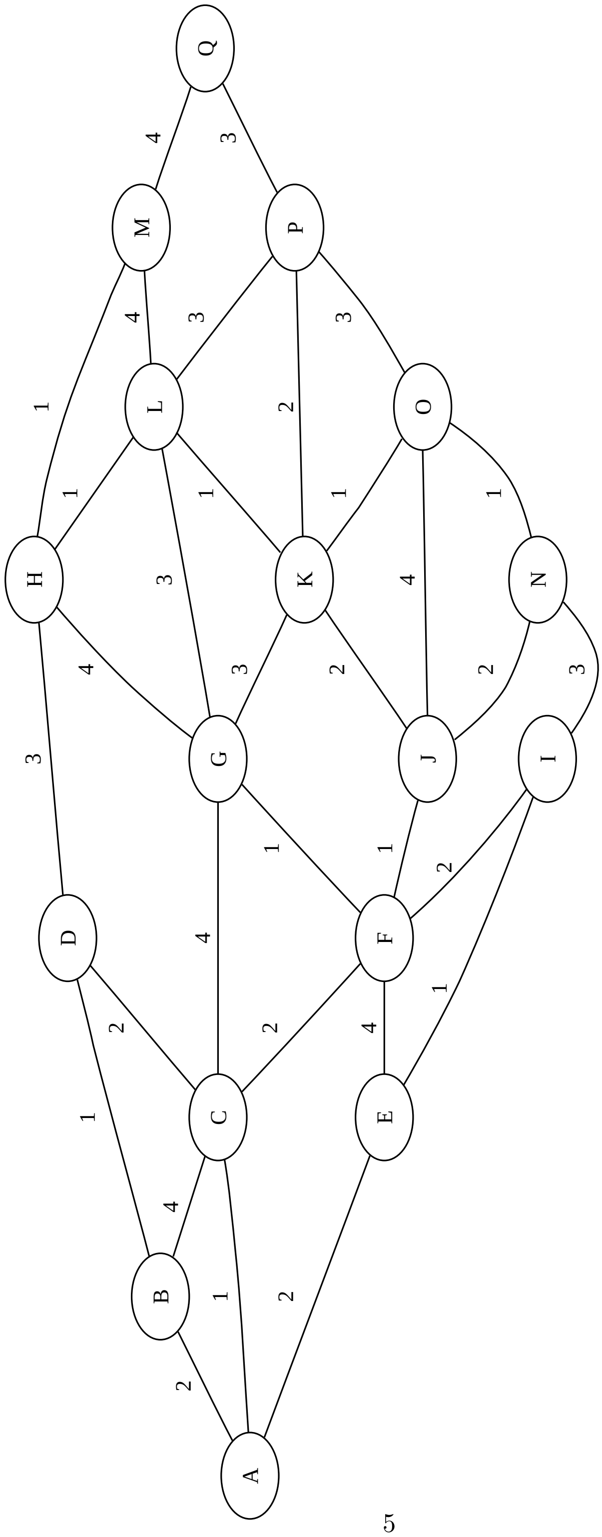
(d) En déduire que

$$\mathbb{E}G = \frac{-p\ln p}{1-p}\frac{1}{\lambda}.$$

(e) Que se passe-t'il pour $\mathbb{E}G$ lorsqu'on fait tendre p vers 1 ? Ce résultat vous semble-t-il conforme à l'intuition ?

FIN DE L'ÉPREUVE

Barème indicatif
Exercice 1: 5 points
Exercice 2: 10 points
Problème: 15 points


A
B
C
D
E
F
G
H
I
J
K
L
M
N
O
P
Q