Université d'Orléans **Deug MASS, MIAS et SM**

Unité MA 3.03

Probabilités et Graphes

Corrigé de l'examen de décembre 2002

Exercice I

1. On trouve $P_G(X) = X(X-1)^2(X-2)^2$. Le plus petit entier qui n'annule pas P_G est 3, donc $\chi_G = 3$. Le nombre de coloriages propres de G lorsque l'on dispose d'une palette de 4 couleurs est $P_G(4) = 144$.
2. (a) La symétrie centrale centrée en C et l'identité sont des exemples d'automorphismes du graphe G.
   (b) On trouve $d(A) = d(B) = d(D) = d(E) = 2$ et $d(C) = 4$.
   (c) Un automorphisme de graphe envoie un sommet sur un sommet de meme degré. Or C est l'unique sommet de degré 4 donc C est envoyé sur lui-même par tout automorphisme du graphe G laissant stable le point c.
   (d) Non, car la symétrie centrale de centre C ne laisse stable que le point C.

Exercice II

1. Si $Z = X + Y \leq 1/2$ et $Y = 0$, alors $Z = X \leq 1/2$ et $Y = 0$. Donc $\{Z \leq 1/2\} \cap \{Y = 0\} \subset \{X \leq 1/2\} \cap \{Y = 0\}$. Si $Z = X \leq 1/2$ et $Y = 0$, alors $Z = X + Y \leq 1/2$ et $Y = 0$.
   Donc $\{X \leq 1/2\} \cap \{Y = 0\} \subset \{Z \leq 1/2\} \cap \{Y = 0\}$ Finalement,

$$\{Z \leq 1/2\} \cap \{Y = 0\} = \{X \leq 1/2\} \cap \{Y = 0\}.$$

   Si $Z = X + Y \leq 1/2$ et $Y = 1/3$, alors $X = Z - 1/3 \leq 1/6$ et $Y = 0$. Donc $\{Z \leq 1/2\} \cap \{Y = 1/3\} \subset \{X \leq 1/6\} \cap \{Y = 1/3\}$. Si $Z = X \leq 1/6$ et $Y = 1/3$, alors $Z = X + Y \leq 1/6 + 1/3 = 1/2$ et $Y = 1/3$. Donc $\{X \leq 1/6\} \cap \{Y = 1/3\} \subset \{Z \leq 1/2\} \cap \{Y = 1/3\}$ Finalement,

$$\{Z \leq 1/2\} \cap \{Y = 1/3\} = \{X \leq 1/6\} \cap \{Y = 1/3\}.$$

2.

$$\begin{aligned} P(\{Z \leq 1/2\} \cap \{Y = 0\}) &= P(\{X \leq 1/2\} \cap \{Y = 0\}) \\ &= P(X \leq 1/2)P(Y = 0) \\ &= 1/2 \times 1/3 \\ &= 1/6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(\{Z \leq 1/2\} \cap \{Y = 1/3\}) &= P(\{X \leq 1/6\} \cap \{Y = 1/3\}) \\ &= P(X \leq 1/6)P(Y = 1/3) \\ &= 1/6 \times 2/3 \\ &= 1/9 \end{aligned}$$

3. On a

$$\begin{aligned} P(Z \leq 1/2) &= P(\{Z \leq 1/2\} \cap \{Y = 0\}) + P(\{Z \leq 1/2\} \cap \{Y = 1/3\}) \\ &= 1/6 + 1/9 = \frac{5}{18}. \end{aligned}$$

D'où $P(Y = 0 | Z \leq 1/2) = \frac{P(\{Z \leq 1/2\} \cap \{Y=0\})}{P(Z \leq 1/2)} = \frac{1/6}{5/18} = 3/5$.

Problème

1. $N + 1$ suit une loi géométrique, donc $N + 1$ est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, donc $N = (N + 1) - 1$ est à valeurs dans $\mathbb{N}$.

   $$\forall n \in \mathbb{N} \quad P(N = n) = P(N + 1 = n + 1) = p(1 - p)^{(n+1)-1} = p(1 - p)^n.$$

2. (a) S_n est la somme des indicatrices de n événements indépendants de même probabilité α, donc S_n suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, \alpha)$.

   (b) S_n est fabriqué à partir des événements $A_1, \ldots, A_n$ qui sont indépendants de N, donc S_n et N sont indépendantes.

   (c) Si $S_n = n$ et $N = n$, alors $G = S_N = S_n = n$.
   On a donc $\{S_n = n\} \cap \{N = n\} \subset \{G = n\}$.

   (d) D'après ce qui précède $P(G = n) \geq P(\{S_n = n\} \cap \{N = n\})$. Comme S_n et N sont indépendantes, on a

   $$\begin{aligned} P(\{S_n = n\} \cap \{N = n\}) &= P(S_n = n)P(N = n) \\ &= \alpha^n p(1 - p)^n. \end{aligned}$$

   Ainsi $P(G = n) \geq \alpha^n p(1 - p)^n > 0$

3. On a pour tout entier n, $S_n \leq n$, donc en particulier $S_N \leq N$, soit $G \leq N$. On en déduit que $\mathbb{E}G \leq \mathbb{E}N = \mathbb{E}(N+1) - 1 = \frac{1}{p} - 1$ car $N+1$ suit une loi géométrique de paramètre p. Donc pour $p \geq 1/2$, on a $\mathbb{E}G \leq \frac{1}{p} - 1 \leq \frac{1}{1/2} - 1 = 1$.

4. (a) Soit $k \in \mathbb{N}$. Les événements $\{N = n\}$, où N décrit $\mathbb{N}$ forment une partition de Ω. On a donc $\{G = k\} = \bigcup_{n=0}^{+\infty} \{N = n, G = k\}$ et la réunion est disjointe. Mais comme $G \leq N$, $\{N = n, G = k\} = \varnothing$ pour $n < k$. On a donc $\{G = k\} = \bigcup_{n=k}^{+\infty} \{N = n, G = k\}$. Maintenant $\{N = n, G = k\} = \{N = n, S_N = k\} = \{N = n, S_n = k\}$. On a donc

$$\{G = k\} = \bigcup_{n=k}^{+\infty} \{N = n, S_n = k\}$$

   (b) Comme on l'a déjà remarqué, la réunion est disjointe. On peut donc écrire

$$P(G = k) = \sum_{n=k}^{+\infty} P(N = n, S_n = k).$$

   On fait le changement d'indices $i = n - k$, et on obtient

$$P(G = k) = \sum_{i=0}^{+\infty} P(N = k + i, S_{k+i} = k).$$

   (c) Comme pour tout $i \in \mathbb{N}$, N et S_{k+i} sont indépendantes, on a

$$\begin{aligned} P(G = k) &= \sum_{i=0}^{+\infty} P(N = k + i) P(S_{k+i} = k) \\ &= \sum_{i=0}^{+\infty} p(1-p)^{k+i} \binom{k+i}{k} \alpha^k (1-\alpha)^i \\ &= p((1-p)\alpha)^k \sum_{i=0}^{+\infty} \binom{k+i}{k} ((1-\alpha)(1-p))^i \end{aligned}$$

   Si on pose $m = k + 1$ et $x = (1-\alpha)(1-p)$, on a $m \in \mathbb{N}^*$ et $0 < x < 1$. On peut donc reconnaitre le développement en série entière de $(1-x)^{-m}$ et on a

$$\begin{aligned} P(G = k) &= p((1-p)\alpha)^k (1 - (1-\alpha)(1-p))^{-(k+1)} \\ &= \frac{p}{1 - (1-\alpha)(1-p)} \left(\frac{(1-p)\alpha}{1 - (1-\alpha)(1-p)}\right)^k \end{aligned}$$

   (d) Posons $r = \frac{p}{1-(1-p)(1-\alpha)}$.
   On a $1 - r = \frac{1-(1-p)(1-\alpha)-p}{1-(1-p)(1-\alpha)} = \frac{p+\alpha-p\alpha-p}{1-(1-p)(1-\alpha)} = \frac{\alpha(1-p)}{1-(1-p)(1-\alpha)}$, donc pour tout entier k non nul, on a $P(G = k) = r(1-r)^k$.

Maintenant, pour n entier non nul, on a
$P(1+G=n) = P(G=n-1) = r(1-r)^{n-1}$, donc $1+G$ suit une loi géométrique de paramètre $r = \frac{p}{1-(1-p)(1-\alpha)}$.

5. $\mathbb{E}G = \mathbb{E}(G+1) - 1 = \frac{1}{r} - 1 = \frac{1-(1-\alpha)(1-p)}{p} - 1 = \frac{\alpha+p-\alpha p-p}{p} = \frac{\alpha(1-p)}{p}$.

6.

$$\begin{aligned}
\{G=N\} &= \bigcup_{n=0}^{+\infty} \{N=n, G=N\} \\
&= \bigcup_{n=0}^{+\infty} \{N=n, S_N=N\} \\
&= \bigcup_{n=0}^{+\infty} \{N=n, S_n=n\}
\end{aligned}$$

et la réunion est disjointe. On a donc, en appliquant l'indépendance de N et S_n:

$$\begin{aligned}
P(G=N) &= \sum_{n=0}^{+\infty} P(N=n, S_n=n) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} P(N=n)P(S_n=n) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} p(1-p)^n\alpha)^n \\
&= p\sum_{n=0}^{+\infty} ((1-p)\alpha))^n \\
&= p\frac{1}{1-(1-p)\alpha} \\
&= \frac{p}{1-(1-p)\alpha}.
\end{aligned}$$

7. C'est exactement l'événement que représente $\{G=N\}$. Il suffit d'onc d'appliquer la formule précédente: $P(G=N) = \frac{0{,}2}{1-(1-0{,}2)0{,}5} = 1/3$.

FIN