**Université d'Orléans** **Deug MASS, MIAS et SM**

Unité MA 3.03

**Probabilités et Graphes**

Examen du 14 décembre 2002

durée: 2h

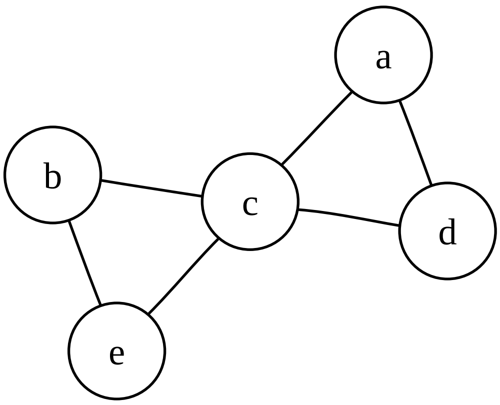
*Le polycopié de cours, les notes manuscrites, et les calculatrices sont autorisés.*

Le sujet est constitué de deux exercices et d'un problème indépendants.

Par commodité d'écriture, on écrit parfois $P(A,B)$ à la place de $P(A \cap B)$.
Ces deux expressions sont équivalentes.

# Exercice I

On considère le graphe non-orienté $G = (S, A)$ représenté ci-dessous.
Si $\phi$ est une application de $S$ dans lui-même et que $x \in S$, on dit que $\phi$ laisse stable le point $x$ si et seulement si $\phi(x) = x$.




1. Déterminer le polynôme chromatique $P_G$ ainsi que le nombre chromatique $\chi_G$. Calculer le nombre de coloriages propres de $G$ lorsque l'on dispose d'une palette de 4 couleurs.

2. (a) Donner un exemple d'automorphisme du graphe $G$.
   (b) Calculer les degrés des différents sommets de $G$.
   (c) Montrer que tous les automorphismes $\phi$ du graphe $G$ laissent stable le point $c$.
   (d) Existe-t-il un sommet du graphe autre que $c$ qui soit laissé stable par tous les automorphismes de $G$ ?

## Exercice II

Soit $X$ une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur l'intervalle $[0, 1]$.
Soit $Y$ une variable aléatoire indépendante de $X$ vérifiant $P(Y = 0) = 1/3$ et $P(Y = 1/3) = 2/3$. On pose $Z = X + Y$.

1. Montrer que

$$\{Z \leq 1/2\} \cap \{Y = 0\} = \{X \leq 1/2\} \cap \{Y = 0\}$$

   et

$$\{Z \leq 1/2\} \cap \{Y = 1/3\} = \{X \leq 1/6\} \cap \{Y = 1/3\}.$$

2. Calculer $P(\{Z \leq 1/2\} \cap \{Y = 0\})$ et $P(\{Z \leq 1/2\} \cap \{Y = 1/3\})$.
3. Montrer que $P(Y = 0|Z \leq 1/2) = 3/5$.

## Problème

Lors de la célébration de l'Independance Day, Billy the Kid tente de subtiliser les bourses d'honnêtes citoyens venus assister au spectacle. Bien évidemment dès que Lucky Luke le voit, il est obligé de s'enfuir immédiatement.

On note

$$A_n = \{\text{La bourse du } n \text{ ième citoyen est accessible.}\}.$$

On admet que $(A_n)_{n\geq 1}$ est une suite d'événements indépendants de même probabilité $\alpha$, avec $\alpha \in ]0, 1[$.

L'instant où Lucky Lucke aperçoit Billy the Kid est modélisé par une variable aléatoire $N$ telle que $N + 1$ suive une loi géométrique de paramètre $p$, avec $p \in ]0, 1[$.

On admet que $N$ est une variable aléatoire indépendante des événements $(A_n)_{n\geq 1}$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{A_k}$$

On s'intéresse dans ce problème au butin de Billy the Kid, qui est représenté par la variable aléatoire

$$G = S_N.$$

1. Quelles valeurs peut prendre la variable aléatoire $N$ ? Montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad P(N=n) = p(1-p)^n.$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$.
   (a) Quelle est la loi de $S_n$ ?
   (b) Justifier par un argument simple que $S_n$ et $N$ sont indépendantes.
   (c) Montrer $\{S_n = n\} \cap \{N = n\} \subset \{G = n\}$.
   (d) En déduire que $P(G = n) > 0$.

3. Montrer $G \leq N$. En déduire que
$$(p \geq 1/2) \Longrightarrow \mathbb{E}G \leq 1.$$

4. (a) Montrer que
$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \{G = k\} = \bigcup_{n=k}^{+\infty} \{N = n, S_n = k\}$$
   (b) En déduire
$$\forall k \in \mathbb{N} \quad P(G = k) = \sum_{i=0}^{+\infty} P(N = k+i, S_{k+i} = k).$$
   (c) Montrer
$$\forall k \in \mathbb{N} \quad P(G=k) = \frac{p}{1-(1-p)(1-\alpha)}\left(\frac{(1-p)\alpha}{1-(1-p)(1-\alpha)}\right)^k$$
   Indication: on pourra utiliser sans démonstration le développement en série entière classique suivant:
$$\forall m \in \mathbb{N}^* \quad \forall x \in ]-1,1[ \quad (1-x)^{-m} = \sum_{i=0}^{+\infty} \binom{i+(m-1)}{i} x^i.$$
   (d) Montrer que $1+G$ suit une loi géométrique de paramètre $\frac{p}{1-(1-p)(1-\alpha)}$.

5. Montrer $\mathbb{E}G = \frac{\alpha(1-p)}{p}$.

6. Montrer $P(G = N) = \frac{p}{1-(1-p)\alpha}$.

7. Dans cette question, on prend $\alpha = 0,5$ et $p = 0,2$. Quelle est la probabilité que Billy the Kid ait pu accéder à toutes les bourses jusqu'au moment où Lucky Luke l'aperçoit ?

**FIN DE L'ÉPREUVE**