Université d'Orléans **Deug MIAS et SM**

Unité MA 3.03

Probabilités et Graphes

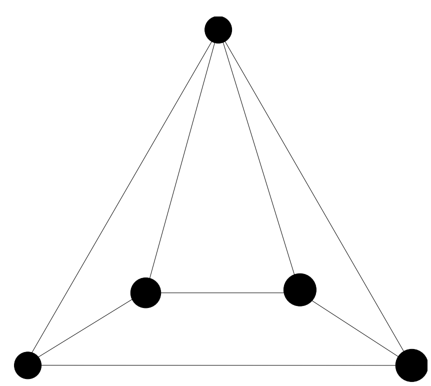
Examen du 18 décembre 2001

durée: 2h

Le polycopié de cours, les notes manuscrites, et les calculatrices sont autorisés.

Exercice I

Déterminer le polynôme chromatique P du graphe suivant ainsi que son nombre chromatique. Donner un exemple de coloriage propre de ce graphe avec un nombre minimal de couleurs et calculer le nombre de coloriages propres de ce graphe lorsque l'on dispose d'une palette de 4 couleurs.



Montrer que les racines complexes de P ont chacune un module inférieur ou égal à $\sqrt{7}$.

Exercice II

Soit $k \in \mathbb{R}$. Montrer que le polynôme $P(X) = X(X-1)(X-3)(X-k)$ est le polynôme chromatique d'un graphe si et seulement $k = 2$. Dans ce cas, dessiner un graphe dont le polynôme chromatique soit le polynôme considéré.

Problème

Soient p et q deux réels de l'intervalle $]0,1[$. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes telles que X suive la loi géométrique de paramètre p et Y la loi géométrique de paramètre q.

1. Question de cours : pour n entier positif, que valent $P(X \geq n)$ et $P(Y \geq n)$? Que valent $\mathbb{E}X$ et $\mathbb{E}Y$?

2. Montrer que
$$P(X \leq Y) = \sum_{i=1}^{+\infty} P(\{Y \geq i\} \cap \{X = i\}).$$
En déduire que
$$P(X \leq Y) = \sum_{i=1}^{+\infty} P(Y \geq i) P(X = i),$$

3. Montrer
$$P(X \leq Y) = \frac{p}{p+q-pq}.$$
En déduire
$$P(X \geq Y) = \frac{q}{p+q-pq}.$$
Pour cette dernière affirmation, un raisonnement cours et précis est attendu

4. (a) Montrer que si deux événements A et B vérifient $A \cup B = \Omega$, où Ω est l'univers des possibles, on a
$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - 1.$$
   (b) En déduire que
$$P(X = Y) = \frac{pq}{p+q-pq}.$$

5. Montrer que $P(X \leq Y) = \frac{1}{2}$ si et seulement si $q = \frac{p}{1-p}$.

6. On s'intéresse maintenant à la variable aléatoire $Z = \min(X, Y)$.
   (a) Montrer $\mathbb{E}Z \leq \min(\frac{1}{p}, \frac{1}{q})$.
   (b) Montrer
$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad P(Z \geq n) = (1-p)^{n-1}(1-q)^{n-1}.$$
   (c) En déduire que Z suit une loi géométrique ayant pour paramètre $r = 1 - (1-p)(1-q)$.

(d) Montrer que

$$\mathbb{E}Z = \frac{1}{p}P(X \leq Y) = \frac{1}{q}P(Y \leq X).$$

En déduire une nouvelle preuve du résultat du (a).

7. Jacques possède un dé à n faces, numérotées de 1 à n. Lorsque Jacques lance un dé, les n résultats possibles sont équiprobables. De même, Lionel possède un dé à k faces, numérotées de 1 à k. Lorsque Lionel lance un dé, les k résultats possibles sont équiprobables.

   Jacques et Lionel lancent leur dé à tour de rôle. Le premier qui obtient le chiffre “1” a gagné. C’est Jacques qui commence.

   (a) Quelle condition doivent vérifier n et k pour que le jeu soit équitable, c’est à dire qu’ils aient autant de chances de gagner l’un que l’autre ?

   (b) Montrer que dans ce cas, le gagnant a lancé en moyenne $\frac{n}{2}$ fois son dé.

FIN DE L’ÉPREUVE