Université d'Orléans

Deug MIAS et SM

Unité MA 3.03

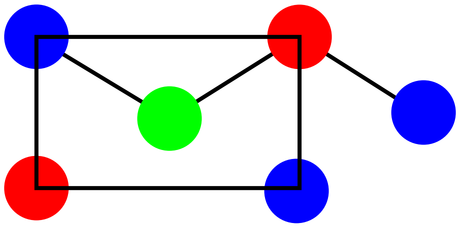
Probabilités et Graphes

Examen du 19 décembre 2000

durée: 2h
Corrigé abrégé

Exercice I

- On trouve $P_G(X) = X(X-1)^2(X-2)(X^2-3X+3)$
- $\chi(G) = \inf\{n \in \mathbb{N}; P_G(n) \neq 0\} = 3$.



- Un exemple de coloriage à 3 couleurs
- Le nombre de coloriages propres à 4 couleurs vaut $P_G(4) = 504$.

Exercice II

Soit A un réel. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = Ax(2-x)\mathbb{1}_{[0,2]}(x).$$

1. f étant continue et positive, elle est la densité d'une probabilité si et seulement si $\int_{\mathbb{R}} f(x)\ dx = 1$. Or $\int_{\mathbb{R}} f(x)\ dx = A\int_0^2 x(2-x)\ dx = \frac{4}{3}A$, donc $A = \frac{3}{4}$.
2. D'après le théorème de transfert, on a

$$\mathbb{E}X = \int_{\mathbb{R}} xf(x)\ dx = \frac{3}{4}\int_0^2 x^2(2-x)\ dx = 1$$

et

$$\mathbb{E}X^2 = \int_{\mathbb{R}} x^2 f(x)\ dx = \frac{3}{4}\int_0^2 x^3(2-x)\ dx = \frac{6}{5}.$$

On en déduit $\mathrm{Var}\ X = \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2 = \frac{1}{5}$.

Problème

1. N_1 est la somme des indicatrices de 4 événements indépendants de même probabilité p, donc N_1 suit une loi binomiale de paramètres $n = 4$ et p.

2. (a) On a défini $A_{1,2}, A_{1,3}, A_{1,4}, A_{2,3}, A_{2,4}, A_{3,4}$, soit 6 événements.

   (b) Les événements B_i et B_i^c forment une partition de Ω. On en déduit que les événements $B_i \cap A_{i,j}$ et $B_i^c \cap A_{i,j}$ forment une partition de $A_{i,j}$ Or $B_i \cap A_{i,j} = \{C_i = 1\} \cap \{C_i \neq C_j\} = \{C_i = 1\} \cap \{C_j\} = B_i \cap B_j^c$. De même $B_i^c \cap A_{i,j} = B_i^c \cap B_j$. On en déduit que $B_i \cap B_j^c$ et $B_i^c \cap B_j$ forment une partition de $A_{i,j}$, d'où l'égalité demandée.

   (c) Comme $B_i \cap B_j^c$ et $B_i^c \cap B_j$ forment une partition de $A_{i,j}$, on a $P(A_{i,j}) = P(B_i \cap B_j^c) + P(B_i^c \cap B_j)$. Comme C_i et C_j sont des variables aléatoires indépendantes, les événements B_i (ou B_i^c) et B_j (ou B_j^c) sont indépendants. On a donc

   $$P(A_{i,j}) = P(B_i)P(B^c) + P(B_i^c)P(B_j) = p(1-p) + (1-p)p = 2p(1-p).$$

3. Les événements $A_{i,j}$ et $A_{k,l}$ sont "fabriqués" à partir des variables aléatoires: X_i et X_j pour $A_{i,j}$,X_k et X_l pour $A_{k,l}$. Or X_i et X_j sont indépendantes de X_k et X_l. Les événements $A_{i,j}$ et $A_{k,l}$ sont donc indépendants.

4. (a) Les événements $A_{i,j} \cap A_{i,k} \cap B_i$ et $A_{i,j} \cap A_{i,k} \cap B_i^c$ forment une partition de $A_{i,j} \cap A_{i,k}$. On a donc

   $$P(A_{i,j} \cap A_{i,k}) = P(A_{i,j} \cap A_{i,k} \cap B_i) + P(A_{i,j} \cap A_{i,k} \cap B_i^c).$$

   Or $A_{i,j} \cap A_{i,k} \cap B_i = B_j^c \cap B_k^c \cap B_i$, d'où $P(A_{i,j} \cap A_{i,k} \cap B_i) = (1-p)^2 p$. De même $A_{i,j} \cap A_{i,k} \cap B_i^c = B_j \cap B_k \cap B_i^c$, d'où $P(A_{i,j} \cap A_{i,k} \cap B_i^c) = p^2(1-p)$. On a donc

   $$P(A_{i,j} \cap A_{i,k}) = (1-p)^2 p + p^2(1-p) = (1-p)p(1-p+p) = p(1-p).$$

   (b) $P(A_{i,j}|A_{i,k}) = \frac{P(A_{i,j} \cap A_{i,k})}{P(A_{i,k})} = \frac{p(1-p)}{2p(1-p} = \frac{1}{2}$.

   (c) Comme $P(A_{i,k}) = 2p(1-p) \neq 0$, $A_{i,j}$ et $A_{i,k}$ sont indépendants si et seulement si $P(A_{i,j}|A_{i,k}) = P(A_{i,j})$, soit $\frac{1}{2} = 2p(1-p)$. Or $p(1-p) = \frac{1}{4}$ si et seulement si $0 = p^2 - p + \frac{1}{4} = (p - \frac{1}{2})^2$ c'est à dire $p = \frac{1}{2}$.

5. (a) $\mathbb{E}Y_{i,j} = \mathbb{E}\mathbb{1}_{A_{i,j}} = P(A_{i,j}) = 2p(1-p)$.

   (b)

   $$\mathbb{E}N_A = \sum_{1 \leq i < j \leq 4} \mathbb{E}Y_{i,j} = \sum_{1 \leq i < j \leq 4} 2p(1-p) = 6 \times 2p(1-p) = 12p(1-p).$$

   En effet d'après la question 2a) , la somme comprend 6 termes.

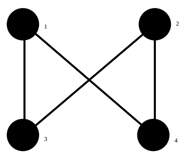
(c) $\mathbb{E}N_A = 12p(1-p) = 12(\frac{1}{4} - (p - \frac{1}{2})^2)$ est maximale lorsque $p = \frac{1}{2}$. (On pourrait aussi étudier la fonction).

6. (a) Si les ensembles $\{i, j\}$ et $\{k, l\}$ sont disjoints, on a montré dans la question 3) que les événements $A_{i,j}$ et $A_{k,l}$ étaient indépendants. Les variables aléatoires $Y_{i,j} = 1\!\!1_{A_{i,j}}$ et $Y_{k,l} = 1\!\!1_{A_{k,l}}$ sont donc indépendantes, donc non corrélées – ceci quel que soit p. Si les ensembles $\{i, j\}$ et $\{k, l\}$ sont distincts mais ne sont pas disjoints, leur intersection est donc un singleton. Quitte à échanger les indices, on peut supposer $i = l < j < k$. On est ramené à la question 4c) : pour $p = \frac{1}{2}$, $A_{i,j}$ et $A_{i,k}$ sont indépendants donc les variables aléatoires $Y_{i,j} = 1\!\!1_{A_{i,j}}$ et $Y_{i,k} = 1\!\!1_{A_{i,k}}$ sont indépendantes, donc non corrélées.

(b) Comme les variables aléatoires $(Y_{i,j})$ sont non corrélées, la variance de leur somme est la somme de leurs variances.
Comme $Y_{i,j} = 1\!\!1_{A_{i,j}}$, on a quels que soient i et j vérifiant $i < j$: $\text{Var } Y_{i,j} = P(A_{i,j})(1 - P(A_{i,j})) = \frac{1}{4}$. (En effet, en utilisant la formule trouvée en 2c) pour $p = \frac{1}{2}$, on trouve $P(A_{i,j}) = \frac{1}{2}$.) On a alors

$$\text{Var } N_A = \sum_{1 \le i < j \le 4} \text{Var } Y_{i,j} = \sum_{1 \le i < j \le 4} \frac{1}{4} = 6 \times \frac{1}{4} = \frac{3}{2}.$$

(Toujours d'après la question 2a) , la somme comprend 6 termes.)

7. (a) 

(b) Dans le graphe $G(\omega)$, les points i et j sont reliés si et seulement si $Y_{i,j}(\omega) = 1$. Le nombre d'arêtes du graphe $G(\omega)$ est donc le nombre de paires $\{i, j\} \in \mathcal{B}_2(S)$ telles que $Y_{i,j}(\omega) = 1$. Comme $Y_{i,j}$ vaut 0 lorsqu'il ne vaut pas 1, le nombre d'arêtes du graphe $G(\omega)$ vaut donc

$$\sum_{1 \le i < j \le 4} Y_{i,j}(\omega) = N_A(\omega).$$

(c) Posons, comme on nous le suggère, $H(\omega) = \{i \in S; \quad C_i(\omega) = 1\}$ et $F(\omega) = \{i \in S; \quad C_i(\omega) = 2\}$.
Soient $i, j \in H(\omega)$: on a $C_i(\omega) = 1 = C_j(\omega)$, donc $\omega \notin A_{i,j}$, donc $Y_{i,j}(\omega) = 0$, donc $\{i, j\} \notin A(\omega)$. $H(\omega)$ est donc un stable. Le même raisonnement montre que $F(\omega)$ est un stable. Comme $H(\omega)$ et $F(\omega)$ forment une partition de S, $A(\omega)$ est donc biparti. Soient $i \in H(\omega)$ et $j \in F(\omega)$: $C_i(\omega) = 1 \neq 2 = C_j(\omega)$ donc $\omega \in A_{i,j}$ et $Y_{i,j} = 1$, donc $\{i, j\} \in A(\omega)$. Toutes les arêtes possibles entre les points de $H(\omega)$ et ceux de $H(\omega)$ existent: $G(\omega)$ est un graphe biparti complet de type $\mathcal{K}_{\text{Card } H(\omega), \text{Card } F(\omega)}$. Il suffit alors de vérifier que $N_1(\omega)$ est le nombre de points de $H(\omega)$, ce qui n'est pas difficile.

(d) D'après ce qui précède, $G(\omega)$ est un graphe biparti complet de type $\mathcal{K}_{2,2}$ si et seulement si $N_1(\omega) = 2$. Or, d'après 1) , N_1 suit une loi binomiale de paramètres 4 et p.

$$P(G \sim \mathcal{K}_{2,2}) = P(N_1 = 2) = \binom{4}{2} p^2(1-p)^2 = 6p^2(1-p)^2.$$

(e) Comme $G(\omega)$ est biparti, il ne contient pas de cycle de longueur impaire, donc pas de triangle.