Unité MA 3.03

Probabilités et Graphes

corrigé de l'examen partiel du novembre 2003

Exercice I

Il suffit simplement de lancer le dé jusqu'à obtention d'un "un" (ou n'importe quel nombre entre un et six fixé à l'avance). Le nombre de lancés effectués suit alors une loi géométrique de paramètre 1/6, puisque les lancers sont indépendants de probabilité 1/6.

Exercice II

On note E l'ensemble des enseignants, H l'ensemble des hommes, F l'ensemble des femmes.

$$\begin{aligned}P(F|E) &= \frac{P(F\cap E)}{P(E)} = \frac{P(F\cap E)}{P(F\cap E)+P(H\cap E)} = \frac{P(E|F)P(F)}{P(E|F)P(F)+P(E|H)P(H)}\\ &= \frac{20,4\times 40,55}{20,4\times 40,55+12,81\times 59,45} = 52,07\%.\end{aligned}$$

Problème

Question préliminaire: pour qu'une famille de réels permettent de définir une probabilité sur un ensemble discret, il faut et il suffit que chacun de ses réels soit positif. Pour avoir $\sum_{k=1}^n Ak = 1$, il faut et il suffit évidemment d'avoir $A = \left(\sum_{k=1}^n k\right)^{-1} = \frac{2}{n(n+1)}$, Il est alors évident que pour ce choix de A, on a pour tout k dans $\{1,\dots,n\}$ $Ak \geq 0$.

1. (a) X et Y prennent des valeurs entières de 1 à n, donc S prend des valeurs entières de 2 à $2n$.

   (b) On utilise la formule du cours donnant la loi de la somme de deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$.

$$\forall k\in\mathbb{N}\quad P(S=k)=\sum_{i=0}^{k} P(X=i)P(Y=k-i)$$

Comme $P(X=i)=P(Y=i)=Ai$ pour tout i dans $\{0,\dots n\}$, on a lorsque $k\in\{0,\dots,n\}$.

$$\begin{aligned}
P(S=k) &= A^2\sum_{i=0}^{k} i(k-i)\\
&= A^2k\frac{k(k+1)}{2}-\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}\\
&= A^2\frac{k(k+1)}{2}\left(k-\frac{2k+1}{6}\right)\\
&= A^2\frac{k(k+1)(k-1)}{6}\\
&= A^2\binom{k+1}{3}
\end{aligned}$$

Contrairement à ce qui était affirmé dans l'énoncé, cette formule n'est pas valide pour $k\in\{n+1,\dots,2n\}$.

(c) Comme S prend des valeurs entières entre 2 et $2n$, les événements $\{S=k\}$, pour k variant entre 2 et $2n$ forment une partition de l'espace. On a donc
$$\sum_{k=2}^{2n} P(S=k)=1.$$
Si l'affirmation de la question précédente étaie vraie (mais elle est fausse !) on aurait alors
$$\sum_{k=2}^{2n} A^2\binom{k+1}{3},$$
ou encore
$$\sum_{k=2}^{2n}\binom{k+1}{3}=A^{-2}=\binom{n+1}{2}^2.$$

2. (a)

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}X &= \sum_{k=1}^{n} kP(X=k)=\sum_{k=1}^{n} Ak^2\\
&= A\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=\frac{2}{n(n+1)}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=\frac{2n+1}{3}.
\end{aligned}$$

(b) Comme X et Y ont même loi $\mathbb{E}Y=\mathbb{E}X$. Maintenant, par linéarité on a $\mathbb{E}Z=\mathbb{E}X+\mathbb{E}Y=2\mathbb{E}X=\frac{2(2n+1)}{3}$..

(c) Comme X et Y ont même loi $\mathrm{Var}\ Y=\mathrm{Var}\ X$. Maintenant, comme X et Y sont indépendantes, on a $\mathrm{Var}\ Z=\mathrm{Var}\ X+\mathrm{Var}\ Y=2\mathrm{Var}\ X$. Ainsi $\frac{\mathrm{Var}\ Z}{\mathrm{Var}\ X}=2$.

3. (a) X vaut au moins 1, au plus n, de même pour Y, ainsi Q vaut au moins $1/n$, au plus n.

   (b) Les événements $Y = k$, pour k variant de 1 à n forment une partition de l'espace. On en déduit que les événements $\{Y = k\} \cap \{Q = 2\}$, pour k variant de 1 à n forment une partition de l'ensemble $Q = 2$.. On a donc

$$P(Q = 2) = \sum_{k=1}^{n} P(Y, k, Q = 2) = \sum_{k=1}^{n} P(X = 2k, Y = k).$$

   (c) Si $k > m$, on a $2k > 2m = n$ donc $0 \leq P(X = 2k, Y = k) \leq P(X = 2k) = 0$. Ainsi

$$P(Q = 2) = \sum_{k=1}^{m} P(X = 2k, Y = k).$$

   Mais comme X et Y sont indépendantes, on a

$$\begin{aligned}
P(Q = 2) &= \sum_{k=1}^{m} P(X = 2k)P(Y = k) \\
&= \sum_{k=1}^{m} 2Ak \times Ak \\
&= 2A^2 \sum_{k=1}^{m} k^2 \\
&= 2A^2 \frac{m(m+1)(2m+1)}{6} \\
&= A^2 \frac{2m(2m+2)(2m+1)}{12} \\
&= A^2 \frac{n(n+2)(n+1)}{12} \\
&= \frac{4}{n^2(n+1)^2} \frac{n(n+2)(n+1)}{12} \\
&= \frac{n+2}{3n(n+1)}.
\end{aligned}$$

FIN DE L'ÉPREUVE