Université d'Orléans **Deug MASS, MIAS et SM**

Unité MA 3.03

Probabilités et Graphes

Examen partiel du 7 novembre 2003

durée: 1h30

Le polycopié de cours, les notes manuscrites, et les calculatric es sont autorisés.

Le sujet est constitué de deux exercices et d'un problème indépendants.

Par commodité d'écriture, on écrit parfois $P(A, B)$ à la place de $P(A \cap B)$. Ces deux expressions sont équivalentes.

Exercice I

Vous disposez d'un dé à six faces. Décrire une expérience aléatoire permettant d'obtenir une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre $1/6$.

Exercice II

Une enquête effectuée parmi les nouveaux adhérents du parti socialiste français a montré que les femmes représentaient $40,55\%$ des nouveaux adhérents. $20,4\%$ des nouvelles militantes socialistes sont enseignantes, tandis que seulement $12,81\%$ des nouveaux militants de sexe masculin sont enseignants. Parmi les enseignants qui militent nouvellement au parti socialiste, quelle est la proportion de femmes ?

Problème

On rappelle les identités bien connues:

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \text{ et } \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Question préliminaire: Soit $n \geq 1$ entier. Pour quelle(s) valeur(s) de A peut-on construire une variable aléatoire à valeurs dans $\{1, \ldots, n\}$ vérifiant

$$\forall k \in \{1, \ldots, n\} \quad P(X = k) = Ak \quad ?$$

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\{1, \ldots, n\}$ vérifiant

$$\forall k \in \{1, \ldots, n\} \quad P(X = k) = P(Y = k) = Ak,$$

où $A = \frac{2}{n(n+1)}$. On définit également les variables aléatoires $S = X + Y$ et $Q = \frac{X}{Y}$.

1. (a) Quelles valeurs peut prendre a priori la variable aléatoire S ?

   (b) Montrer que

   $$\forall k \in \{2, \ldots, 2n\} \quad P(S = k) = A^2 \binom{k+1}{3}.$$

   (c) En déduire l'identité

   $$\sum_{k=2}^{2n} \binom{k+1}{3} = \binom{n+1}{2}^2.$$

2. (a) Montrer $\mathbb{E}X = \frac{2n+1}{3}$.

   (b) Calculer $\mathbb{E}S$.

   (c) Que vaut $\frac{\text{Var } S}{\text{Var } X}$?

3. (a) Quelle est la plus petite valeur que peut prendre Q ? La plus grande ?

   (b) Montrer

   $$P(Q = 2) = \sum_{k=1}^{n} P(X = 2k, Y = k).$$

   (c) On suppose maintenant que n est pair et s'écrit $n = 2m$. Montrer

   $$P(Q = 2) = \sum_{k=1}^{m} P(X = 2k) P(Y = k),$$

   puis

   $$P(Q = 2) = \frac{n+2}{3n(n+1)}.$$

FIN DE L'ÉPREUVE