Université d'Orléans **Deug MASS, MIAS et SM**

Unité MA 3.03

Probabilités et Graphes

Correction du partiel de novembre 2002

durée: 1h30

Ce document contient des commentaires concernant la résolution du sujet ainsi qu'un corrigé abrégé. Il a été rédigé par Olivier Garet et Franck Lesieur, auteurs du sujet.

Commentaires

Description du sujet

Le sujet était constitué d'un exercice et d'un problème indépendants, le problème étant lui même constitué d'une question préliminaire et de 3 parties relativement indépendantes. Le sujet, relativement long, était noté sur 100 points. La note finale est obtenue en divisant le total des points par 3. Le barème privilégiait clairement le début du sujet, réputé plus facile, de sorte qu'un candidat ayant traité exclusivement, mais parfaitement, l'exercice et la question préliminaire du problème, se serait vu attribuer un total de 42, soit la note de 14/20.

Sur l'exercice

À la grande surprise des auteurs du sujet, l'exercice s'est révélé constituer une véritable difficulté pour les candidats. Si la plupart d'entre eux reconnaissent bien une loi binomiale, trop nombreux sont ceux qui peinent à en identifier les paramètres, faute de parvenir à modéliser convenablement le problème concret qui leur est posé. Dans le même ordre d'idée, quelques uns écrivent que le parachutiste survit si $X \geq 1$. Si on se souvient que X représente le nombre de fixations qui cèdent, l'erreur est alors évidente. Dans les problèmes issus de la vie réelle, un peu de calme et de bon sens doit permettre d'éviter de telles erreurs qui empêchent le candidat d'être à même d'exploiter les qualités mathématiques qu'il peut par ailleurs posséder.

Parmi ceux qui parviennent à la troisième question en ayant obtenu des résultats raisonnables au questions 1 et 2, nombreux sont ceux qui se laissent décourager par la perspective d'étudier le signe de la différence d'un polynôme de degré deux et d'un polynôme de degré 4. Sans se lancer aveuglément dans des calculs interminables, il faut avoir suffisamment de courage et de confiance en soi pour poursuivre quelques lignes d'un calcul d'une difficulté raisonnable.

Sur la question préliminaire du problème

Peu de candidats se sont risqués à affronter la question préliminaire du problème, sans doute à cause de sa formulation un peu abstraite. La lecture du corrigé devrait permettre de démystifier cette question et convaincre qu'une question d'apparence abstraite peut admettre une solution très simple. En l'occurence, la maitrise du principe de partition était la seule compétance nécessaire.

Quelques uns, ayant sans doute lu un peu vite l'énoncé, supposent que Z et T sont indépendants, ce qui est ce que l'on veut démontrer. Ceux là payent bien cher leur hâte. Rappelons que la lecture attentive et intégrale du sujet, dès sa distribution, est la clef de la réussite aux épreuves d'examen ou de concours.

Sur la partie I du problème

La moitié des candidats est incapable de dire quelles valeurs peut prendre une variable aléatoire suivant une loi géométrique.

Concernant la deuxième question de la partie I, une mise au point s'impose. Ici comme très souvent, l'égalité de deux ensembles traduit le fait que deux propriétés sont équivalentes. Nous voulons signaler aux candidats la difficulté du raisonnement par équivalence, très difficile en soi, vraisemblablement inaccessible à la très grande majorité des candidats. Ainsi, pour montrer $\{A\} = \{B\}$ ou $(A) \iff (B)$, il est beaucoup plus prudent – donc rentable – de montrer $\{A\} \subset \{B\}$, puis $\{B\} \subset \{A\}$, ou $(A) \Longrightarrow (B)$, puis $(B) \Longrightarrow (A)$.

Quelques candidats, heureusement peu nombreux, semblent avoir mal compris le théorème d'associativité de l'indépendance, et pensent pouvoir parler d'une variable aléatoire indépendante. Rappelons donc que l'indépendance est un concept qui exprime un rapport (en fait une absence de rapport) entre des événements ou des variables. Ainsi, de même qu'on peut dire "Alain et Bernard sont amis" et pas "Alain est ami", on peut dire "les variables aléatoires X et Y sont indépendantes", mais pas "la variable aléatoire X est indépendante".

Les questions 5 et 6 de la partie I, plus difficiles, de même que les parties II et III n'ont été abordées de manière conséquente que par les meilleures copies.

Nous avons vu peu de confusions entre un événement et sa probabilité, peu de confusions également entre événements indépendants et événements disjoints. Nous nous en réjouissons.

Conclusion

Nous ne pouvons cacher notre déception devant la faiblesse des notes obtenues. Nous pensons néanmoins que cette faiblesse est plus due à une incapacité à mobiliser ses connaissances face au stress engendré par la longueur du sujet qu'à de profondes lacunes. Nous invitons les étudiants légitimement déçus par leur performance à étudier attentivement le corrigé afin de cerner précisément les difficultés auxquelles ils ont été confrontés.

Quelques candidats, quoique ne traitant qu'une grosse moitié d'un sujet délibérément long, ont su avancer humblement et patiemment leurs résultats avec une grande rigueur. Qu'ils soient ici félicités et encouragés à pousuivre sur cette voie de la rigueur et de la ténacité, qualités indispensables à la formation scientifique.

Exercice

1. Pour $i = 1, 2$, on note $A_i = \{$ La fixation numéro i cède $\}$. Les événements A_i sont indépendants et de même probabilité p. Comme $X = 1\!\!1_{A_1} + 1\!\!1_{A_2}$, X suit une loi binomiale $\mathcal{B}(2, p)$.

$$P(\text{survie en solo}) = P(X \leq 1) = 1 - P(X = 2) = 1 - p^2$$

   7 points

2. Pour $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, on note $B_i = \{$ La fixation numéro i cède $\}$. Les événements B_i sont indépendants et de même probabilité p. Comme $Y = \sum_{i=1}^{4} 1\!\!1_{A_i}$, Y suit une loi binomiale $\mathcal{B}(4, p)$.

$$P(\text{survie en tandem}) = P(Y \leq 2) = 1 - P(Y = 4) - P(Y = 3)$$
$$= 1 - p^4 - 4p^3(1 - p)$$

   7 points

3.

$$\begin{aligned} P(\text{survie en tandem}) - P(\text{survie en solo}) = & \quad p^2 - p^4 - 4p^3(1 - p) \\ = & \quad p^2(3p^2 - 4p + 1) \\ = & \quad p^2(3p - 1)(p - 1) \end{aligned}$$

   - Si $p = 0$, les fixations sont garanties donc la survie est assurée ;
   - Si $0 < p < \frac{1}{3}$, le saut en tandem est plus sûr ;
   - Si $p = \frac{1}{3}$, la probabilité de survie est la même dans les deux cas;
   - Si $\frac{1}{3} < p < 1$, le saut en solo est recommandé ;
   - Enfin, si $p = 1$, les fixations cèderont et les deux sauts conduiront à l'enlisement. 8 points

Problème

Question Préliminaire

1. La famille $(\{Z = k\} \cap \{T = l\})_{l \in D}$, forme une partition de $\{Z = k\}$ pour tout $k \in D$. D'après le principe de partition, on a, pour tout $k \in D$,

$$P(Z = k) = \sum_{l \in D'} P(Z = k, T = l) = \sum_{l \in D'} f(k)g(l) = f(k) \sum_{l \in D'} g(l) = tf(k)$$

4 points En appliquant ce qui précède, en changeant Z et T, on obtient, pour tout $l \in D'$,

$$P(T = l) = g(l) \sum_{k \in D} f(k) = sg(l)$$

4 points

2. $$\begin{aligned} 1 = P(\Omega) &= \sum_{k \in D} P(Z = k) \qquad &&\text{d'après le principe de partition,} \\ &= \sum_{k \in D} tf(k) &&\text{d'après 1.,} \\ &= t \sum_{k \in D} f(k) = st \end{aligned}$$

6 points

3. Pour tous $k \in D$ et $l \in D'$, on a :

$$\begin{aligned} P(Z = k)P(T = l) &= tf(k)sg(l) \qquad &&\text{d'après 1.,} \\ &= f(f)g(l) &&\text{d'après 2.,} \\ &= P(Z = k, T = l) \end{aligned}$$

donc Z et T sont indépendantes. 6 points

1 Partie I

1. $X(\Omega) = Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$, $\min(X, Y)(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $(X - Y)(\Omega) = \mathbb{Z}$. 4 points

2. Pour tous $k \in \mathbb{N}$ et $l \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned} \{X - Y = k, \min(X, Y) = l\} &= \{X - Y = k, \min(X, Y) = l, X \geq Y\} \qquad \text{car } k \geq 0 \\ &= \{X - Y = k, Y = l\} \\ &= \{X = k + l, Y = l\} \end{aligned}$$

7 points

3. Pour tous $k \in \mathbb{N}$ et $l \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned} P(X-Y=k,\min(X,Y)=l) &= P(X=k+l, Y=l) && \text{d'après 2.} \\ &= P(X=k+l)P(Y=l) && \text{par indépendance} \\ &= p(1-p)^{k+l-1}q(1-q)^{l-1} \\ &= pq(1-p)^k[(1-p)(1-q)]^{l-1} \end{aligned}$$

4 points

4. Pour tous k entier négatif et $l \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$P(X-Y=k,\min(X,Y)=l) = P(Y-X=-k,\min(Y,X)=l)$$

où $-k \in \mathbb{N}$ donc en appliquant 3. en changeant X et Y (et donc p et q), on obtient :

$$P(X-Y=k,\min(X,Y)=l) = pq(1-q)^{-k}[(1-p)(1-q)]^{l-1}$$

Ainsi, on a l'expression, pour tous $k \in \mathbb{Z}$ et $l \in \mathbb{N}^*$,

$$P(X-Y=k,\min(X,Y)=l) = pq(1-s_k)^{|k|}[(1-p)(1-q)]^{l-1}$$

où $s_k = \begin{cases} p \text{ si } k \geq 0 \\ q \text{ si } k < 0 \end{cases}$ 4 points

5. Si on pose :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{Z} &\to \mathbb{R} \\ k &\mapsto pq(1-s_k)^{|k|} \end{aligned} \qquad \text{et} \qquad \begin{aligned} g : \mathbb{N}^* &\to \mathbb{R} \\ l &\mapsto [(1-p)(1-q)]^{l-1} \end{aligned}$$

alors d'après 4., on a, pour tous $k \in \mathbb{Z}$ et $l \in \mathbb{N}^*$,

$$P(X-Y=k,\min(X,Y)=l) = f(k)g(l)$$

et donc d'après la question préliminaire, $X-Y$ et $\min(X,Y)$ sont indépendantes.
6 points

6.

$$\sum_{l=1}^{\infty}[(1-p)(1-q)]^{l-1} = \sum_{n=0}^{\infty}[(1-p)(1-q)]^n = \frac{1}{1-[(1-p)(1-q)]} = \frac{1}{r}$$

D'après la question préliminaire et avec les mêmes notations, on a, pour tout $l \in \mathbb{N}^*$,

$$P(\min(X,Y)=l) = sg(l) = \frac{1}{t}g(l)$$

or $t = \sum_{l=1}^{\infty}[(1-p)(1-q)]^{l-1} = \frac{1}{r}$ et $g(l) = [(1-p)(1-q)]^{l-1}$, donc

$$P(\min(X,Y)=l) = r(1-r)^{l-1}$$

i.e $\min(X,Y)$ suit une loi géométrique de paramètre r. 8 points

Partie II

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $P(X = n, Y = n) = P(X = n)P(Y = n) \neq 0$ par indépendance. 3 points

2. $$\frac{P(X = n+1, Y = n)}{P(X = n, Y = n)} = \frac{P(X - Y = 1, Y = n)}{P(X - Y = 0, Y = n)} = \frac{P(X - Y = 1, \min(X,Y) = n)}{P(X - Y = 0, \min(X,Y) = n)}$$

   or , par hypothèse, $X - Y$ et $\min(X, Y)$ sont indépendantes, donc

   $$\frac{P(X = n+1, Y = n)}{P(X = n, Y = n)} = \frac{P(X - Y = 1)P(Y = n)}{P(X - Y = 0)P(Y = n)}$$

   Comme $P(X - Y = 0)P(Y = n) = P(X - Y = 0, \min(X, Y) = n) = P(X = n, Y = n) \neq 0$, on a $P(X - Y = 0) \neq 0$ et $P(Y = n) \neq 0$ et donc, après division licite, on obtient

   $$\frac{P(X = n+1, Y = n)}{P(X = n, Y = n)} = \frac{P(X - Y = 1)}{P(X - Y = 0)} = 1 - p$$

   6 points

3. D'après 2. et comme X et Y sont indépendantes, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

   $$1 - p = \frac{P(X = n+1, Y = n)}{P(X = n, Y = n)} = \frac{P(X = n+1)P(Y = n)}{P(X = n)P(Y = n)} = \frac{P(X = n+1)}{P(X = n)}$$

   donc, par récurrence immédiate, $P(X = n) = P(X = 1)(1 - p)^{n-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Or

   $$\begin{aligned} 1 = P(\Omega) &= \sum_{n=1}^{\infty} P(X = n) \text{ d'après le principe de partition,} \\ &= P(X = 1) \sum_{n=1}^{\infty} (1 - p)^{n-1} = P(X = 1) \sum_{l=0}^{\infty} (1 - p)^l \\ &= P(X - 1) \frac{1}{1 - (1 - p)} = \frac{P(X = 1)}{p} \end{aligned}$$

   donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $P(X = n) = p(1 - p)^{n-1}$ i.e X suit une loi géométrique de paramètre p 6 points

4. En appliquant 3. en changeant X et Y, on obtient que Y suit une loi géométrique de paramètre $q = 1 - \frac{P(Y - X = 1)}{P(Y - X = 0)} = 1 - \frac{P(X - Y = -1)}{P(X - Y = 0)}$. 3 points

Partie III

1. $X - Y$ est une variable aléatoire constante égale à -1 et $\min(X, Y)$ est une variable aléatoire constante égale à 1 donc $X - Y$ et $\min(X, Y)$ sont indépendantes (deux variables aléatoires constantes sont toujours indépendantes). 3 points

2. $P(Y = 1) = 0$ donc l'exemple de cette partie n'entre pas dans le cadre de la partie II. 4 points