Université d'Orléans **Deug MASS, MIAS et SM**

Unité MA 3.03

Probabilités et Graphes

Examen partiel du 8 novembre 2002

durée: 1h30

Le polycopié de cours, les notes manuscrites, et les calculatrices sont autorisés.

Le sujet est constitué d'un exercice et d'un problème indépendants.

Rappel: par commodité d'écriture, on écrit parfois $P(A, B)$ à la place de $P(A \cap B)$. Ces deux expressions sont équivalentes.

Exercice

Des parachutistes sautent au-dessus d'une zone marécageuse. Ils disposent de raquettes à fixer sous les chaussures afin de ne pas s'enliser. Les fixations ont une probabilité p de céder à cause des défauts de fabrications, de la violence du choc... Les parachutistes peuvent sauter en solo ; auquel cas, pour ne pas s'enliser, il faut avoir conservé au moins la moitié de ses raquettes. Les parachutistes peuvent sauter aussi en tandem ; dans ce cas, pour ne pas s'enliser, ils doivent conserver au moins la moitié de leurs quatre raquettes.

1. Dans un saut en solo, on note X le nombre de fixations qui cèdent. Donner la loi de X. Calculer la probabilité de survie du parachutiste.
2. Dans un saut en tandem, on note Y le nombre de fixations qui cèdent. Donner la loi de Y. Calculer la probabilité de survie des parachutistes.
3. Conclure, en fonction de p, la meilleure stratégie à adopter pour assurer la survie d'un parachutiste.

Problème

Question préliminaire

Soient D et D' des ensembles dénombrables. On suppose que Z est une variable aléatoire à valeurs dans D, T une variable aléatoire à valeurs dans D' telles qu'il existe une fonction $f : D \to \mathbb{R}$ et une fonction $g : D' \to \mathbb{R}$ avec

$$\forall k \in D \quad \forall l \in D' \quad P(\{Z = k\} \cap \{T = l\}) = f(k)g(l).$$

Le but de cette question est de montrer que Z et T sont indépendantes, c'est à dire que

$$\forall k \in D \quad \forall l \in D' \quad P(\{Z = k\} \cap \{T = l\}) = P(Z = k)P(T = l).$$

On pose $s = \sum_{k \in D} f(k)$ et $t = \sum_{l \in D'} g(l)$

1. Montrer
$$\forall k \in D \quad P(Z = k) = tf(k)$$
et
$$\forall l \in D' \quad P(T = l) = sg(l).$$

2. En utilisant le fait que les événements $\{Z = k\}_{k \in D}$ forment une partition de l'univers Ω, montrer $1 = st$.

3. Conclure.

Partie I

Soient $p, q \in]0, 1[$. Soit X une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre p et soit Y une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre q. On suppose, en outre, que X et Y sont indépendantes.

1. Quelles valeurs peuvent prendre $X, Y, X - Y$ et $\min(X, Y)$?

2. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $l \in \mathbb{N}^*$, on a :
$$\{X - Y = k, \min(X, Y) = l\} = \{X = k + l, Y = l\}$$

3. Montrer que
$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \forall l \in \mathbb{N}^* \quad P(X-Y = k, \min(X, Y) = l) = pq(1-p)^k((1-p)(1-q))^{l-1}.$$

4. Montrer que
$$\forall k \in \mathbb{Z} \quad \forall l \in \mathbb{N}^* \quad P(X-Y = k, \min(X, Y) = l) = pq(1-s_k)^{|k|}((1-p)(1-q))^{l-1},$$
où l'on a posé
$$s_k = \begin{cases} p & \text{si } k \geq 0 \\ q & \text{si } k < 0 \end{cases}$$

5. Montrer que les variables aléatoires $X-Y$ et $\min(X,Y)$ sont indépendantes.

6. Que vaut $\sum_{l=1}^{+\infty} ((1-p)(1-q))^{l-1}$? Montrer que $\min(X,Y)$ suit une loi géométrique de paramètre $r = 1-(1-p)(1-q)$. (On pourra utiliser les résultats montrés à la question préliminaire.)

Partie II

On veut prouver une réciproque à la partie I. On considère donc deux variables aléatoires X et Y indépendantes telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}^* P(X=n) > 0 \text{ et } P(Y=n) > 0.$$

On suppose que les variables aléatoires $X-Y$ et $\min(X,Y)$ sont indépendantes.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $P(X=n, Y=n) \neq 0$.

2. Prouver que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\frac{P(X=n+1, Y=n)}{P(X=n, Y=n)} = \frac{P(X-Y=1)}{P(X-Y=0)}$$

3. En déduire que X suit une loi géométrique de paramètre $p = 1 - \frac{P(X-Y=1)}{P(X-Y=0)}$.

4. Établir la loi de Y par un raisonnement simple.

Partie III

Soit X une variable aléatoire constante égale à 1 et soit Y une variable aléatoire constante égale à 2.

1. Montrer que $X-Y$ et $\min(X,Y)$ sont indépendantes.

2. Expliquer pourquoi l'exemple précédent ne contredit pas les résultats de la seconde partie.

FIN DE L'ÉPREUVE