Université d'Orléans

Deug MIAS et SM

Unité MA 3.03

Probabilités et Graphes

Examen Partiel du 7 novembre 2001

durée: 2h
Corrigé abrégé

Exercice I

1. Comme $512 = 2^9$ est une puissance (entière)de 2, tout diviseur de 512 est une puissance (entière) de 2. Il s'ensuit que l'application

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto (2^{x_1}, 2^{x_2}, 2^{x_3}, 2^{x_4})$$

réalise une bijection entre $S = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{N}^4; x_1+x_2+x_3+x_4 = 9\}$ et $\{(u_1, u_2, u_3, u_4) \in \mathbb{N}^4; u_1 \times u_2 \times u_3 \times u_4 = 512\}$. Or S possède $\binom{9+4-1}{4-1} = \binom{12}{3} = 220$ éléments (cf théorème 4 du cours). Comme deux ensembles en bijection ont même cardinal, il y a donc 220 solutions à l'équation proposée.

2.
   - Le même raisonnement s'applique en remplaçant "2" par "5". Il y a donc toujours 220 solutions à la première équation.
   - Tout diviseur de 10^9 est de la forme $2^x 5^y$, avec x et y entiers. On en déduit que

   $$(x_1, x_2, x_3, x_4) \times (y_1, y_2, y_3, y_4) \mapsto (2^{x_1}5^{y_1}, 2^{x_2}5^{y_2}, 2^{x_3}5^{y_3}, 2^{x_4}5^{y_4})$$

   réalise une bijection entre $S \times S$ et $M = \{(u_1, u_2, u_3, u_4) \in \mathbb{N}^4; u_1 \times u_2 \times u_3 \times u_4 = 10^9\}$. Cette dernière équation admet donc Card $S \times S =$ Card $S^2 = 220^2 = 4400$ solutions.

3. Notons A votre année de naissance et Ψ l'application qui à $(u_1, u_2, u_3, u_4) \in M$ associe le reste de la division de $u_1 + 2u_2 + 3u_3 + 4u_4$ par A. Ψ prend ses valeurs dans $\{0, 1, \ldots, A-1\}$ qui est un ensemble de cardinal $A < 1990$ (ou alors présentez moi une pièce d'identité !). L'ensemble de départ M à comme cardinal un nombre supérieur à 1990. Comme le cardinal de l'ensemble de départ est supérieur à celui de l'ensemble d'arrivée, l'application Ψ ne peut être injective.

   Il existe donc $(u_1, u_2, u_3, u_4) \in M$ et $(v_1, v_2, v_3, v_4) \in M$ avec $\psi(u_1, u_2, u_3, u_4) = \Psi(v_1, v_2, v_3, v_4)$. Ainsi $u_1 + 2u_2 + 3u_3 + 4u_4$ et $v_1 + 2v_2 + 3v_3 + 4v_4$ sont congrus modulo A, ce qui implique que leur différence est un multiple de A.

Exercice II

- Comme X est positif, $Y \geq 0.4 \iff X \leq \frac{1}{0.4} = 2.5$. Donc

$$\begin{aligned}
P(Y \geq 0.4) &= P(X \leq 2.5) \\
&= \int_{-\infty}^{2.5} \frac{1}{4-2} 1\!\!1_{[2,4]}(x)\ dx \\
&= \int_{2}^{2.5} \frac{1}{2}\ dx = \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

- D'après le théorème de transfert,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}Y &= \mathbb{E}\frac{1}{X} \\
&= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{4-2} 1\!\!1_{[2,4]}(x) \frac{1}{x}\ dx \\
&= \int_{2}^{4} \frac{1}{2}\frac{1}{x}\ dx \\
&= \frac{\ln 4 - \ln 2}{2} \\
&= \frac{\ln 2}{2}
\end{aligned}$$

Problème

1. (a)

$$\begin{aligned}
\binom{k}{p} + \binom{k}{p+1} &= \frac{k!}{p!(k-p)!} + \frac{k!}{(p+1)!(k-p-1)!} \\
&= \frac{k!}{p!(k-p-1)!}\left(\frac{1}{k-p} + \frac{1}{p+1}\right) \\
&= \frac{k!}{p!(k-p-1)!}\frac{k+1}{(k-p)(p+1)} \\
&= \frac{(k+1)!}{(p+1)!(k-p)!} \\
&= \binom{k+1}{p+1}
\end{aligned}$$

   (b) On peut, p étant fixé, montrer cette propriété par récurrence sur n: pour $n = p$, les deux membres de l'égalités sont égaux à 1. La propriété est bien héréditaire, car la propriété au rang $n-1$:

$$\sum_{k=p}^{n-1} \binom{k}{p} = \binom{n}{p+1}$$

implique
$$\sum_{k=p}^{n}\binom{k}{p}=\binom{n}{p+1}+\binom{n}{p}=\binom{n+1}{p+1}$$
d'après la question précédente.

2. Comme X et Y sont à valeurs dans $\{1,\dots,n\}$, on a toujours $X\geq 1$ et $Y\geq 1$, d'où $S\geq 2$, donc $\{S\leq 1\}=\varnothing$, d'où $P(S\leq 1)=0$.

3. Comme X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$, on a
$$\forall k\in\mathbb{N}\quad P(S=k)=\sum_{i=0}^{k}P(X=i)P(Y=n-i).$$
Si $i=0$, alors $P(X=i)=0$, de même si $i=n$, $P(Y=n-i)=0$. On a donc plus simplement
$$\forall k\in\mathbb{N}\quad P(S=k)=\sum_{i=1}^{k-1}P(X=i)P(Y=n-i).$$
Supposons maintenant $k\in\{2,\dots,n\}$. On a alors $\forall i\in\{2,\dots,n\}\quad i\in\{1,\dots n\}$ et $n-i\in\{1,\dots,n\}$, d'où
$$P(S=k)=\sum_{i=1}^{k-1}P(X=i)P(Y=n-i)=\sum_{i=1}^{k-1}\frac{1}{n}\frac{1}{n}=\frac{k-1}{n^2}.$$

4. Comme $S\geq 2$, on a pour tout $i\geq 2$,
$$\begin{aligned}P(S\leq i)&=P(S\in\{2,\dots,i\})\\&=\sum_{k=2}^{i}P(S=k)\\&=\sum_{k=2}^{i}\frac{k-1}{n^2}\\&=\frac{1}{n^2}\sum_{k=2}^{i}(k-1)\\&=\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{i-1}k\\&=\frac{1}{n^2}\frac{(i-1)i}{2}\end{aligned}$$

5. S est construites à partir de X et Y qui sont toutes 2 indépendantes de Z, donc S est indépendante de Z.

6. (a) Comme les événements $\{Z = i\}$ forment une partition de l'espace lorsqu'on fait varier i de 2 à n, on a

$$P(S \le Z) = \sum_{i=2}^{n} P(\{S \le Z\} \cap \{Z = i\}).$$

Comme $\{S \le Z\} \cap \{Z = i\} = \{S \le i\} \cap \{Z = i\}$, l'égalité s'ensuit.

(b) Comme S et Z sont indépendantes, l'identité

$$P(S \le Z) = \sum_{i=2}^{n} P(\{S \le i\} \cap \{Z = i\})$$

entraine

$$P(S \le Z) = \sum_{i=2}^{n} P(S \le i)P(Z = i).$$

En injectant les résultats trouvés précédemment, on a

$$\begin{aligned} P(S \le Z) &= \sum_{i=2}^{n} \frac{i(i-1)}{2n^2} \frac{1}{n} \\ &= \frac{1}{n^3} \sum_{k=2}^{n} \binom{k}{2}. \end{aligned}$$

On applique la formule trouvée à la première question avec $p = 2$, et on a donc

$$P(S \le Z) = \frac{1}{n^3} \binom{n+1}{3} = \frac{(n-1)(n+1)}{6n^2} = \frac{1}{6} - \frac{1}{6n^2}$$

7. L'orque se bat dans une configuration où $n = 12$ tandis que le hobbit se bat dans une configuration où $n = 4$: la probabilité est donc plus grande pour l'orque (par exemple, on peut remarquer que $n \mapsto \frac{1}{6} - \frac{1}{6n^2}$ est croissante).