Université d'Orléans

Deug MIAS et SM

Unité MA 3.03

Probabilités et Graphes

Examen Partiel du 7 novembre 2001

durée: 1h30

Le polycopié de cours, les notes manuscrites, et les calculatrices sont autorisés.

Exercice I

1. Combien y a t-il de quadruplets $(u_1, u_2, u_3, u_4) \in \mathbb{N}^4$ vérifiant $u_1 \times u_2 \times u_3 \times u_4 = 512$?
   Indication: on pourra remarquer que les diviseurs de $512 = 2^9$ sont tous de la forme 2^x, avec $x \in \mathbb{N}$.
2. Même question en remplaçant 512 par $1953125 = 5^9$, puis par 10^9 (un milliard).
3. Pour résoudre cette dernière question, on pourra admettre que le résultat final de la question précédente est un nombre supérieur à 1990.
   Montrer que l'on peut trouver deux quadruplets distincts (u_1, u_2, u_3, u_4) et v_1, v_2, v_3, v_4 vérifiant $u_1 \times u_2 \times u_3 \times u_4 = v_1 \times v_2 \times v_3 \times v_4 = 10^9$ et tels que $(u_1 + 2u_2 + 3u_3 + 4u_4) - (v_1 + 2v_2 + 3v_3 + 4v_4)$ soit un multiple de votre année de naissance.
   Indication: introduire l'application qui a (u_1, u_2, u_3, u_4) associe le reste de la division de $u_1 + 2u_2 + 3u_3 + 4u_4$ par votre année de naissance.

Exercice II

Soit X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[2, 4]$. On pose $Y = \frac{1}{X}$. Calculer $P(Y \geq 0.4)$ et $\mathbb{E}Y$.

SUITE DE L'ÉPREUVE AU VERSO

Problème

Soient X, Y, Z trois variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur l'ensemble $\{1, \ldots, n\}$. On pose $S = X + Y$.

1. (a) Par la méthode de votre choix, montrer que

$$\forall k \geq 1 \quad \forall p \in \{0, \ldots k-1\} \quad \binom{k}{p} + \binom{k}{p+1} = \binom{k+1}{p+1}.$$

   (b) En déduire que pour tous les entiers n, p vérifiant $1 \leq p \leq n$, on a

$$\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}.$$

2. Montrer sans aucun calcul que $P(S \leq 1) = 0$.

3. Montrer

$$\forall k \in \{2, \ldots, n\} \quad P(S = k) = \frac{k-1}{n^2}.$$

4. En déduire

$$\forall i \in \{2, \ldots, n\} \quad P(S \leq i) = \frac{i(i-1)}{2n^2}.$$

5. Justifier brièvement le fait que S soit indépendante de Z.

6. (a) Montrer que

$$P(S \leq Z) = \sum_{i=2}^{n} P(\{S \leq i\} \cap \{Z = i\}).$$

   (b) En déduire que

$$P(S \leq Z) = \frac{1}{n^3} \sum_{k=2}^{n} \binom{k}{2},$$

   puis

$$P(S \leq Z) = \frac{(n-1)(n+1)}{6n^2}$$

7. Pour réussir une épreuve d'un jeu de rôle, un joueur doit obtenir par un lancer de dé au moins autant de points que le magicien qui, lui, lance deux dés. Les dés sont identiques, non truqués, possèdent chacun n faces numérotées de 1 à n. Lorsqu'un hobbit affronte le magicien, le combat s'effectue avec des dés tétraédriques (4 faces) , tandis que lorsqu'un orque affronte le magicien, le combat s'effectue avec des dés dodécaédriques (12 faces).
   Qui, de l'orque ou du hobbit, a le plus de chance de vaincre le magicien ?

FIN DE L'ÉPREUVE