Université d'Orléans **Deug MASS, MIAS et SM**

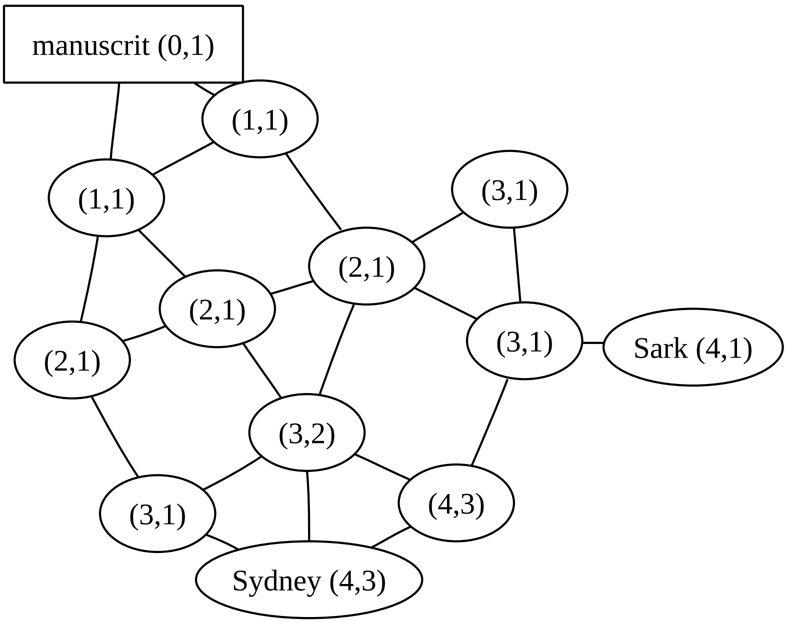
Unité MA 3.03

Probabilités et Graphes

corrigé de l'examen du 8 juin 2004

Exercice I

1. On applique l'algorithme classique et on obtient les résultats ci-dessous.



   Ainsi, il faut que Sydney traverse 4 couloirs pour atteindre le manuscrit et il y a 3 solutions possibles. De même, il il faut que Sark traverse 4 couloirs pour atteindre le manuscrit et il y a une seule solution possibles.

2. Il y a une probabilité $(9/10)^4.(9/10)^4. = 0.9^8 = 0.4305$ pour qu'ils y parviennent tous les deux, et une probabilité $(9/10)^4.(1-(9/10)^4) = 0.2256$ que seule Sydney y parvienne.

3. On applique le principe de partition: $0.9^8.(2/3)+(9/10)^4.(1-(9/10)^4) = 0.5126$.

Problème

1. On note N la loi du nombre d'alliés qui désirent la mort de Arvin Sloane.

   (a) On a
   $$N = \sum_{k=1}^{5} \mathbb{1}_{E_k \neq 0}.$$
   Comme les (E_k) sont des variables aléatoires indépendantes, les événements $\{E_k \neq 0\}$ sont des événements indépendants. Ils ont tous la même probabilité $P(E_k \neq 0) = 1 - P(E_k = 0) = 1 - e^{-\lambda}$. On en déduit que N suit la loi binomiale $\mathcal{B}(5, 1 - e^{-\lambda})$.

   (b) D'après la question précédente, la probabilité que personne ne veuille tuer Arvin Sloane est
   $$(1 - (1 - e^{-\lambda}))^5 = e^{-5\lambda}.$$
   Application numérique: $e^{-1} = 0.3679$.

   (c) D'après la question précédente, la probabilité que 2 oraganisations veuillent tuer Arvin Sloane est
   $$\binom{5}{2}(1 - e^{-\lambda})^2(1 - (1 - e^{-\lambda}))^2 = 10(1 - e^{-\lambda})^2 e^{-3\lambda}.$$
   Application numérique: $10(1 - e^{-1/5})^2 e^{-3/5} = 0.1803$.

2. (a) Notons $Z = X + Y$. X, Y, Z sont à valeurs dans $\mathbb{N}$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme X et Y sont indépendantes, on a
   $$\begin{aligned} P(Z = n) &= \sum_{k=0}^{n} P(X = k)P(Y = n - k) \\ &= \sum_{k=0}^{n} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} e^{-\mu}\frac{\mu^{n-k}}{(n-k)!} \\ &= e^{-(\lambda+\mu)} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n!}\frac{n!}{k!(n-k)!}\lambda^k \mu^{n-k} \\ &= e^{-(\lambda+\mu)} \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\lambda^k \mu^{n-k} \\ &= e^{-(\lambda+\mu)} \frac{1}{n!}(\lambda + \mu)^n \end{aligned}$$
   ce qui montre bien que $Z = X + Y$ suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda + \mu$.

   (b) Comme S_k s'écrit en fonction de $E_1, E_2, \dots E_k$, S_k est indépendant de E_{k+1}. Alors le résultat voulu découle facilement de la question précédente.

3. (a) S_5 représente le nombre total de tueurs à la poursuite de Sloane. Ainsi, la probabilité pour qu'Arvin Sloane essuie k tentatives de meurtre est donnée par la loi de Poisson $\mathcal{P}(5\lambda)$ est vaut donc $\frac{(5\lambda)^k}{k!}e^{-5\lambda}$. Application numérique: $\frac{1}{2}e^{-1} = 0.1839$.

   (b) L'événement considéré peut évidemment s'écrire

$$\{S_5 = k\} \cap \{E_5 = 0\}.$$

   Mais comme $S_5 = S_4 + E_5$, on a

$$\{S_5 = k\} \cap \{E_5 = 0\} = \{S_4 = k\} \cap \{E_5 = 0\}.$$

   On a déjà remarqué que S_4 et E_5 sont indépendantes: le résultat cherché est donc $P(\{S_4 = k\} \cap \{E_5 = 0\}) = P(S_4 = k)P(S_5 = 0) = \frac{(4\lambda)^k}{k!}e^{-4\lambda} \times e^{-\lambda}$, d'après les questions précédentes.

   (c) L'événement chercher peut s'écrire

$$\cup_{1\leq i<j\leq 5}\{E_i = 1\} \cap \{E_j = 1\} \cap \bigcap_{k\neq i,j} \{E_j = 0\},$$

   et la réunion est disjointe, donc la probabilité cherchée est

$$\sum_{1\leq i<j\leq 5} P(\{E_i = 1\} \cap \{E_j = 1\} \cap \bigcap_{k\neq i,j} \{E_j = 0\}.)$$

   Chaque terme de la somme vaut $(\lambda e^{-\lambda})^2(e^{-\lambda})^3$, et il y a exactement $\binom{5}{2} = 10$ termes dans la somme, d'où le résultat: $10\lambda^2 e^{-5\lambda}$. Application numérique avec $\lambda = 1/5$: $\frac{2}{5}e^{-1} = 0.1472$.

4. (a) Notons J l'événement $\{$Jack prévient Arvin que la CIA veut le tuer$\}$.On a $P(J|E_5 \neq 0) = 2/5$ et $P(J|E_5 = 0) = 0$. D'où

$$\begin{aligned} P(E_5 = 0|J^c) &= \frac{P(J^c|E_5 = 0)P(E_5 = 0)}{P(J^c|E_5 = 0)P(E_5 = 0) + P(J^c|E_5 \neq 0)P(E_5 \neq 0)} \\ &= \frac{1.e^{-\lambda}}{1.e^{-\lambda} + 3/5(1 - e^{-\lambda})} \\ &= \frac{1}{1 + 3/5(e^{\lambda} - 1)} \end{aligned}$$

   Application numérique avec $\lambda = 1/5$: $1/(1 + 0.6(e^{0.2} - 1)) = 0.8827$.

   (b) Nous cherchons $P(\{E_5 = 0\}|(J^c \cap \{S_5 = k\}))$.

$$\begin{aligned} P(\{E_5 = 0\} \cap J^c \cap \{S_5 = k\}) &= P(\{E_5 = 0\} \cap J^c \cap \{S_4 = k\}) \\ &= P(\{E_5 = 0\} \cap J^c)P(S_4 = k) \\ &= P(J^c|E_5 = 0)P(E_5 = 0)P(S_4 = k) \\ &= e^{-\lambda}e^{-4\lambda}\frac{(4\lambda)^k}{k!} \\ &= \frac{e^{-5\lambda}\lambda^k}{k!}4^k \end{aligned}$$

D'autre part

$$
\begin{aligned}
P(\{E_5 \neq 0\} \cap J^c \cap \{S_5 = k\}) &= P(J^c|(\{E_5 \neq 0\} \cap \{S_5 = k\})P(\{E_5 \neq 0\} \cap \{S_5 = k\}) \\
&= P(J^c|(\{E_5 \neq 0\})P(\{E_5 \neq 0\} \cap \{S_5 = k\}) \\
&= P(J^c|(\{E_5 \neq 0\})(P(S_5 = k) - P(\{E_5 = 0\} \cap \{S_5 = k\})) \\
&= P(J^c|(\{E_5 \neq 0\})(P(S_5 = k) - P(\{E_5 = 0\} \cap \{S_4 = k\})) \\
&= P(J^c|(\{E_5 \neq 0\})(P(S_5 = k) - P(E_5 = 0)P(S_4 = k)) \\
&= (3/5)(e^{-5\lambda}\frac{(5\lambda)^k}{k!} - e^{-\lambda}e^{-4\lambda}(\frac{(4\lambda)^k}{k!})) \\
&= \frac{e^{-5\lambda}\lambda^k}{k!}((3/5)(5^k - 4^k)
\end{aligned}
$$

On obtient alors

$$
\begin{aligned}
P(\{E_5 = 0\}|(J^c \cap \{S_5 = k\})) &= \frac{P(\{E_5 = 0\} \cap J^c \cap \{S_5 = k\})}{P(J \cap \{S_5 = k\})} \\
&= \frac{P(\{E_5 = 0\} \cap J^c \cap \{S_5 = k\})}{P(\{E_5 = 0\} \cap J^c \cap \{S_5 = k\}) + P(\{E_5 \neq 0\} \cap J^c \cap \{S_5 = k} \\
&= \frac{4^k}{4^k + (3/5)(5^k - 4^k)} \\
&= \frac{1}{1 + (3/5)((5/4)^k - 1)}
\end{aligned}
$$

Pour $k = 4$, on trouve $1/(1 + 0.6(1.25^4 - 1)) = 0.5362$.

FIN DE L'ÉPREUVE