Université d'Orléans **Deug MASS, MIAS et SM**

Unité MA 3.03

Probabilités et Graphes

Examen du 8 juin 2004

durée: 2h

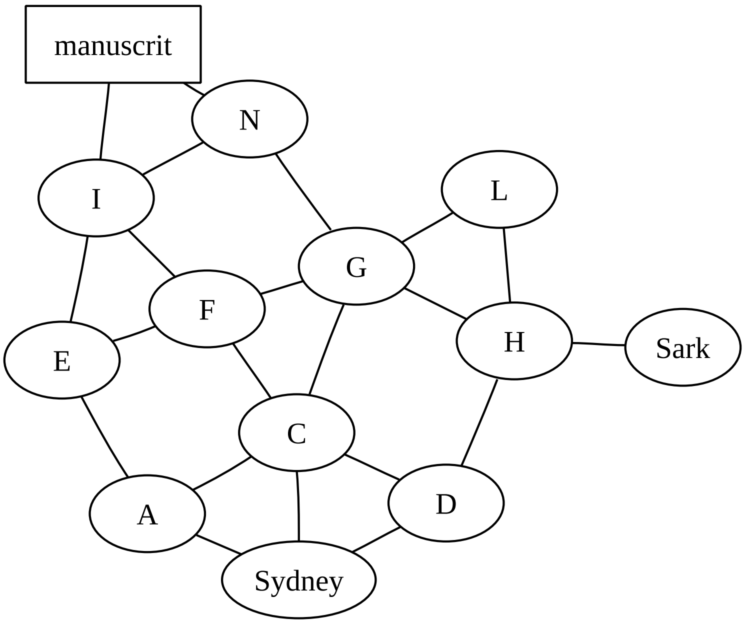
Le polycopié de cours, les notes manuscrites, et les calculatrices sont autorisés.

Le sujet est constitué d'un exercice et d'un problème indépendants.

Exercice

Sark, agent du Covenant, une puissante organisation criminelle, et Sydney Bristow, agent de la CIA, cherchent tous deux à s'emparer d'un manuscrit de Rambaldi.

Pour cela, ils doivent traverser un labyrinthe dont chaque couloir est piégé. (Voir le plan ci-dessous, chaque arête du graphe correspondant à un couloir.)



1. Combien y-a-t'il de chemins pour Sydney lui permettant d'atteindre le manuscrit en traversant le moins de couloirs possibles ? En donner un. Même question pour Sark.

   On pourra répondre en partie sur la feuille Annexe que l'on joindra à la copie.

2. Sachant que Sydney et Sark ont chacun 9 chances sur 10 de survivre à chacun des pièges qu'il rencontrent, et que tous ces événements sont indépendants, quelle est la probabilité qu'ils parviennent tous les deux dans la salle où est le manuscrit ? Quelle est la probabilité que seule Sydney y parvienne ? (On suppose qu'ils disposent tous deux du plan et adoptent donc la stratégie optimale.)

3. Si ils parviennent tous les deux dans la salle où est le manuscrit, il y a un combat, et Sydney a alors 2 chances sur 3 de l'emporter. Quelle est la probabilité que Sydney réussisse sa mission ?

Problème

Arvin Sloane, ancien agent de la CIA reconverti dans le crime organisé et dans l'action humanitaire, doit, pour préserver ses intérêts, conclure des alliances temporaires avec différents interlocuteurs, à savoir

- Katia Derevko, qui travaille pour le NKD (services secrets russes)
- M. Sark, qui travaille pour le Covenant (association criminelle internationale)
- le sénateur Reed, membre du Trust (organisation secrète du gouvernement américain)
- le premier ministre chinois
- Jack Bristow, officier supérieur de la CIA (services secrets américains)

Mais ses alliés se méfient de lui et peuvent donc envoyer des agents chargés de le tuer. On note E_1, E_2, E_3, E_4, E_5 le nombre d'agents envoyés respectivement par chacune de ses cinq organisations pour exécuter Sloane.

On suppose que E_1, E_2, E_3, E_4, E_5 sont indépendantes et suivent la loi de Poisson de paramètre λ.

1. On note N la loi du nombre d'alliés qui désirent la mort de Arvin Sloane.
   (a) Montrer que N suit la loi binomiale $\mathcal{B}(5, 1 - e^{-\lambda})$.
   (b) Quelle est la probabilité que personne ne veuille tuer Arvin Sloane ? Application numérique avec $\lambda = 1/5$.
   (c) Quelle est la probabilité pour qu'exactement deux de ses alliés veuillent tuer Arvin Sloane ? Application numérique avec $\lambda = 1/5$.

2. (a) Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes, X suivant la loi de Poisson de paramètre λ et Y la loi de Poisson de paramètre μ. Montrer que $X+Y$ suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda+\mu$.

   (b) On pose $S_1 = E_1, S_2 = E_1 + E_2, S_3 = E_1 + E_2 + E_3, S_3 = E_1 + E_2 + E_3, S_4 = E_1 + E_2 + E_3 + E_4, S_5 = E_1 + E_2 + E_3 + E_4 + E_5$. Montrer par récurrence sur n que pour tout $n \in \{1,2,3,4,5\}$, S_n suit la loi de Poisson de paramètre $n\lambda$.

3. (a) Que représente S_5 ? Soit $k \geq 0$. Montrer que la probabilité pour qu'Arvin Sloane essuie k tentatives de meurtre vaut $\frac{(5\lambda)^k}{k!}e^{-5\lambda}$
   Application numérique avec $\lambda = 1/5$ et $k = 2$.

   (b) Montrer que la probabilité pour qu'Arvin Sloane essuie k tentatives de meurtre, sans qu'aucune provienne de la CIA, vaut $\frac{(4\lambda)^k}{k!}e^{-5\lambda}$. Indication: on pourra remarquer que l'événement considéré peut s'écrire $\{S_4 = k\} \cap \{E_5 = 0\}$.

   (c) Montrer que la probabilité pour qu'Arvin Sloane ait à sa poursuite exactement deux tueurs ayant des commanditaires différents vaut $10\lambda^2 e^{-5\lambda}$.
   Application numérique avec $\lambda = 1/5$.

4. En raison de leurs anciens liens d'amitiés, on peut estimer que si la CIA décidait de tuer Arvin Sloane, il y a deux chances sur cinq que Jack le prévienne. Par souci de simplification, on supposera que Jack n'a aucun intérêt à faire croire à tort à Sloane que la CIA cherche à le tuer.

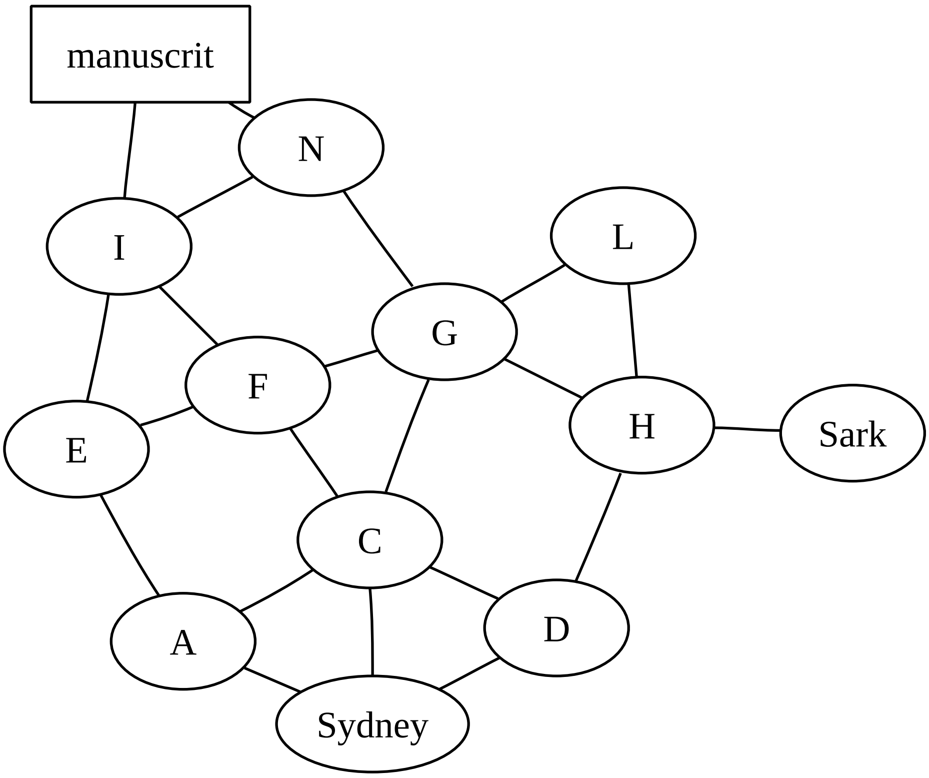
   (a) Jack Bristow assure à Arvin qu'à son grand regret, la CIA lui fait encore confiance et qu'en conséquence, elle ne désire pas sa mort. Sachant celà, quelle est la probabilité que la CIA ne désire pas la mort d'Arvin Sloane ?
   Application numérique avec $\lambda = 1/5$.

   (b) Soit $k \geq 0$. Sachant qu'Arvin Sloane a été victime de k tentatives de meurtres, montrer que la probabilité que Jack lui ait dit la vérité lorsqu'il lui a dit que la CIA ne souhaitait pas sa mort vaut

$$\frac{1}{1 + \frac{3}{5}((5/4)^k - 1)}.$$

   Application numérique avec $k = 4$.

FIN DE L'ÉPREUVE


manuscrit
N
I
L
G
F
H
Sark
E
C
A
D
Sydney