Université d'Orléans **Deug MASS, MIAS et S**

Unité MA 3.03

Probabilités et Graphes

corrigé abrégé de l'examen du 20 juin 2003

durée: 2h

Exercice I

En appliquant le théorème de transfert, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}Y &= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{3}\mathbb{1}_{[1,4]}(x)\frac{1}{x^2}\ dx \\ &= \frac{1}{3}\int_1^4 x^{-2}\ dx \\ &= \frac{1}{3}(1-1/4) \\ &= \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

$P(Y \geq 0.25) = P(\frac{1}{X^2} \geq 0.25) = P(\frac{1}{X} \geq 0.5) = P(X \leq 2) = \frac{2-1}{3} = \frac{1}{3}$.

Exercice II

1. X représente le nombre de succès dans une suite de 3 événements indépendants ayant chacun la même probabilité de succès $1/6$. Donc X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n=3, p=1/6)$.

2. Comme $G = X - \mathbb{1}_{\{X=0\}}$, on a $\mathbb{E}G = \mathbb{E}X - \mathbb{E}\mathbb{1}_{\{X=0\}} = \mathbb{E}X - P(X=0)$. Comme suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n=3, p=1/6)$, on a $P(X=0) = (1-p)^n = (5/6)^3$ et $\mathbb{E}X = np = 1/2$. Finalement, $\mathbb{E}G = \frac{1}{2} - (5/6)^3 = \frac{3^3.2^2-5^3}{6^3} = -\frac{17}{216}$.

Problème

Partie I

1. Soit $c \in \mathrm{CP}_n(H)$ et montrons que $\Psi(c) \in \mathrm{CP}_n(H)$. Soient k et l tels que $e = \{k,l\} \in A$. On a $\Psi(c)(k) = \sigma(c(k))$ et $\Psi(c)(l) = \sigma(c(l))$. Comme c

est un coloriage propre, on a $c(k) \neq c(k)$. Comme σ est injective, on en déduit $\Psi(c)(k) = \sigma(c(k)) \neq \sigma(c(l)) = \Psi(c)(l)$. Comme e est quelconque, on en déduit que $\Psi(c)$ est un coloriage propre. Ψ est donc une application de $\mathrm{CP}_n(H)$ dans lui même.

2. Maintenant, pour tout $c \in \mathrm{CP}_n(H)$ et $k \in S$, on a $\Psi \circ \Psi(c)(k) = \sigma(\Psi(c)(k)) = \sigma \circ (\sigma \circ c)(k) = (\sigma \circ \sigma \circ c)(k) = c(k)$, car σ est une involution. On a donc $\Psi \circ \Psi(c) = c$ pour tout c, donc $\Psi \circ \Psi$ est l'identité: Ψ est une involution de $\mathrm{CP}_n(H)$.

   Soit maintenant $c \in C^z_{i,n}(H)$: on a $\Psi(c)(z) = \sigma(c(z)) = \sigma(i) = j$. Comme la restriction de Ψ à $C^z_{i,n}(H)$ est la restriction d'une bijection, on en déduit $\Psi(c)$ est une injection de $C^z_{i,n}(H)$ dans $C^z_{j,n}(H)$. De la même manière $\Psi = \Psi^{-1}$ réalise une injection de $C^z_{j,n}(H)$ dans $C^z_{i,n}(H)$. On en déduit que Ψ réalise une bijection entre $C^z_{j,n}(H)$ et $C^z_{i,n}(H)$.

3. Deux ensembles qui sont en bijection ont le même cardinal, donc $|C^z_{i,n}(H)| = |C^z_{j,n}(H)|$

4. $\mathrm{CP}_n(H)$ est la réunion disjointe des $C^z_{i,n}(H)$, pour i variant de 1 à n. D'après la question précédente, ils ont tous le même cardinal. Notons m ce cardinal commun. On a donc

$$\begin{aligned}
\mathrm{CP}_H(n) &= \sum_{k=1}^{n} |C^z_{k,n}(H)| \\
&= \sum_{k=1}^{n} m \\
&= mn
\end{aligned}$$

   d'où $m = \frac{\mathrm{CP}_H(n)}{n}$.

Partie II

1. Comme chaque arête de $G[A]$ est une arête de A et que le coloriage de ses extrémités par $c_{|A}$ est le même que leur coloriage par c, une arête “proprement” coloriée le reste.

2. Montrons d'abord que l'application définie sur $D^n_{i,j}$ par $\phi(c) = (c_{|S_1}, c_{|S_2})$ prend bien ses valeurs dans $C^{x_0}_{i,n}(G[S_1]) \times C^{y_0}_{j,n}(G[S_2])$. Montrons que pour c coloriage propre de G vérifiant $c(x_0) = i$, $c_{|S_1}$ est un coloriage propre de $G[S_1]$ vérifiant $c_{|S_1}(x_0) = i$. A l'évidence, il suffit de montrer que $c_{|S_1}$ est un coloriage propre de $G[S_1]$, ce qui a été démontré à la question précédente. On montre de même que pour c coloriage propre de G vérifiant $c(y_0) = j$, $c_{|S_2}$ est un coloriage propre de $G[S_2]$ vérifiant $c_{|S_2}(y_0) = i$. L'injectivité provient du fait que $S_1 \cup S_2 = S$, ainsi connaissant c sur S_1 et S_2, on la connait sur S tout entier.

Voyons la surjectivité. Soit $(a,b) \in C^{x_0}_{i,n}(G[S_1]) \times C^{y_0}_{j,n}(G[S_2])$. On va construire un antécédent de (a,b) par ϕ. Définissons c par

$$c(k) = \begin{cases} a(k) & \text{si } k \in S_1 \\ b(k) & \text{si } k \in S_2 \end{cases}$$

Il est clair que c est bien défini car S_1 et S_2 sont disjoints et que l'on a $c(x_0) = a(x_0) = i$ et $c(y_0) = b(y_0) = j$. Il ne reste plus qu'à montrer que c est un coloriage propre. Soit $e = \{z,t\}$ une arête de G. Si z et t sont dans S_1, alors c colorie l'arête de la même manière que a, donc proprement. De même z et t sont dans S_2, alors c colorie l'arête de la même manière que b, donc proprement. Si on est dans aucun des deux cas précédents, c'est que $e = \{x_0, y_0\}$, car c'est la seule arête qui n'a pas ses deux extrémités dans la même partie de la partition. Or on sait que l'arête $e\{x_0,y_0\}$ est correctement coloriée, car $c(x_0) = i \neq j = c(y_0)$. Le coloriage est donc propre, on a donc bien trouvé un antécédent. Maintenant, il suffit de rappeler que deux ensembles en bijection ont même cardinal et que le cardinal d'un ensemble produit est le produit des cardinaux pour achever la preuve. On a donc

$$|D^n_{i,j}| = |C^{x_0}_{i,n}(G[S_1])| \times |C^{y_0}_{j,n}(G[S_2])|.$$

Mais, d'après en appliquant le résultat de la question I à $G[S_1]$ et $G[S_2]$, on a $|C^{x_0}_{i,n}(G[S_1])| = \frac{P_{G[S_1]}(n)}{n}$ et $|C^{x_0}_{i,n}(G[S_2])| = \frac{P_{G[S_2]}(n)}{n}$, d'où puis $|D^n_{i,j}| = \frac{P_{G[S_1]}(n)P_{G[S_2]}(n)}{n^2}$.

3. $\mathrm{CP}_n(H)$ est la réunion disjointe des $D^n_{i,j}$, pour i variant de 1 à n et $i \neq j$. D'après la question précédente, ils ont tous le même cardinal $\frac{P_{G[S_1]}(n)P_{G[S_2]}(n)}{n^2}$. On a donc

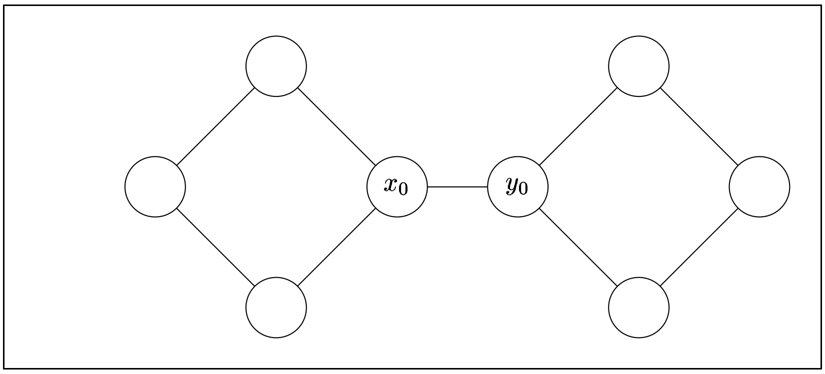
$$\begin{aligned} \mathrm{CP}_H(n) &= \sum_{1\leq i,j\leq n; i\neq j}^{n} |D^n_{i,j}| \\ &= \sum_{1\leq i,j\leq n; i\neq j} \frac{P_{G[S_1]}(n)P_{G[S_2]}(n)}{n^2} \\ &= n(n-1)\frac{P_{G[S_1]}(n)P_{G[S_2]}(n)}{n^2} \\ &= (n-1)\frac{P_{G[S_1]}(n)P_{G[S_2]}(n)}{n} \end{aligned}$$

4. $$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad nP_G(n) = (n-1)P_{G[S_1]}(n)P_{G[S_2]}(n).$$

Cela signifie que les polynômes XP_G et $(X-1)P_{G[S_1]}P_{G[S_2]}$ coincident sur un ensemble infini. On en déduit qu'ils sont égaux, d'où

$$P_G = \frac{X-1}{X}P_{G[S_1]}P_{G[S_2]}.$$

5. On note $G = (S, A)$ le graphe ci-dessous, S_1 l'ensemble composé des 4 points du carré de gauche et S_2 les l'ensemble composé des 4 points du carré de gauche.



Le théorème démontré ci-dessus s'applique; on a $G[S_1] = [S_2] = \mathcal{C}_4$, d'où $P_G = \frac{X-1}{X} P_{\mathcal{C}_4}^2 = \frac{X-1}{X}\big(X(X-1)(X^2-3X+3)\big)^2 = X(X-1)^3(X^2-3X+3)^2$.

6. On a $P_G = P_{G-e} - P_{G.e}$. Dans le graphe $G - e$, les composantes S_1 et S_2 ne communiquent pas, donc le résultat rappelé s'applique: on a $P_G = P_{G[S_1]} P_{G[S_2]}$. Finalement,

$$\begin{aligned} P_{G.e} &= P_{G[S_1]} P_{G[S_2]} - \frac{X-1}{X} P_{G[S_1]} P_{G[S_2]} \\ &= \frac{1}{X} P_{G[S_1]} P_{G[S_2]}. \end{aligned}$$

7. Le graphe représenté est précisément le graphe $G.e$ correspondant au graphe de l'exemple précédent. On a donc comme polynome chromatique $\frac{1}{X} P_{\mathcal{C}_4}^2 = X(X-1)^2(X^2-3X+3)^2$.

FIN DE L'ÉPREUVE