**Université d'Orléans** **Deug MASS, MIAS et SM**

Unité MA 3.03

**Probabilités et Graphes**

Examen du ? juin 2003

durée: 2h

*Le polycopié de cours, les notes manuscrites, et les calculatrices sont autorisés.*

Le sujet est constitué de deux exercices et d'un problème indépendants.

## Exercice I

Soit $X$ une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[2, 4]$. On pose $Y = \frac{1}{X^2}$. Calculer $P(Y \geq 0.4)$ et $\mathbb{E}Y$.

## Exercice II

Un jeu consiste à effectuer une mise en choisissant un nombre entre 1 et 6, puis à lancer simultanément trois dés. Si le numéro choisi sort une fois, le joueur récupère sa mise plus une somme égale à sa mise. Si le numéro choisi sort deux fois, le joueur récupère sa mise plus une somme égale à deux fois sa mise. Enfin, si le numéro choisi sort trois fois, le joueur récupère sa mise plus une somme égale à trois fois sa mise.

1. On note $X$ le nombre de fois où l'on a obtenu le nombre choisi. Montrer que $X$ suit une loi binômiale dont on précisera les paramètres.
2. Quelle est l'espérance de gain à ce jeu ?
   Indication: on pourra remarquer que le gain est $G = X - \mathbb{1}_{\{X=0\}}$.

## Problème

Soit $G = (S, A)$ un graphe simple non orienté. On suppose qu'il existe une partition $\{S_1, S_2\}$ de $S$ et des sommets $x_0 \in S_1$ et $y_0 \in S_2$ tels que $\{x_0, y_0\}$ tels que $\{x_0, y_0\}$ soit l'unique arête entre un point de $S_1$ et un point de $S_2$. Autrement dit

1. $\{x_0, y_0\} \in 1$.
2. $\forall (x,y) \in (S_1 \backslash \{x_0\}) \times (S_2 \backslash \{y_0\}) \quad \{x,y\} \notin A$.

Le but du problème est de montrer l'identité

$$P_G = \frac{X-1}{X} P_{G[S_1]} P_{G[S_2]} \tag{1}$$

et d'en donner quelques applications.

On pourra utiliser sans démonstration le résultat suivant, vu dans l'exercice 8 du chapitre 8 du polycopié:

Soit $G = (S, A)$ un graphe et $(S_1, S_2)$ une partition de $S$ telle que

$$\forall X \in S_1 \quad \forall y \in S_2 \quad \{x,y\} \notin A.$$

Alors
$P_G = P_{G[S_1]} P_{G[S_2]}$.

1. Soit $H$ un graphe simple non-orienté et $z$ un sommet quelconque du graphe. Le but de cette question est de montrer que le nombre de coloriages propres de $G$ à l'aide d'une palette de $n$ couleurs où l'on a imposé une couleur donnée pour le sommet $z$ vaut $\frac{P_H(n)}{n}$.
   Soit $n$ un entier non nul. Pour $i \in \{1, \ldots, n\}$, on note
   $$C_{i,n}^z(H) = \{c \in \mathrm{CP}_n(H); c(z) = i\};$$
   c'est l'ensemble des coloriages propres de $G$ à valeurs dans $\{1, \ldots, n\}$ tels que le sommet $z$ est colorié avec la couleur $i$. Soient $i$ et $j$ deux éléments distincts de $\{1, \ldots, n\}$ fixés.

   On note $\sigma$ la transposition de $\{1, \ldots, n\}$ qui échange les points $i$ et $j$. On rappelle que $\sigma$ est définie par
   $$\sigma(k) = \begin{cases} j & \text{si } k = i \\ i & \text{si } k = j \\ k & \text{sinon.} \end{cases}$$
   (a) Montrer que l'application $c \mapsto c \circ \sigma$ réalise une bijection entre $C_{i,n}^z(H)$ et $C_{j,n}^z(H)$.
   (b) En déduire que $|C_{i,n}^z(H)| = |C_{j,n}^z(H)|$
   (c) En déduire que $|C_{i,n}^z(H)| = \frac{P_H(n)}{n}$.

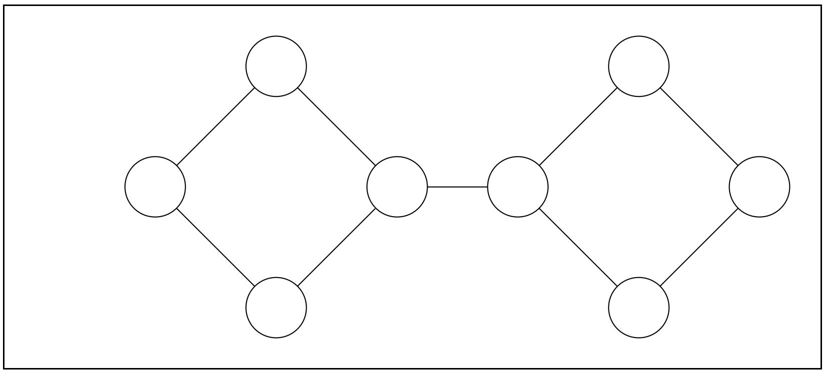
2. Pour $i$ et $j$ éléments distincts de $\{1, \ldots, n\}$, on note
   $$D_{i,j}^n = \{c \in \mathrm{CP}_n(G); c(x_0) = i \text{ et } c(y_0) = j\}.$$

3. Montrer que
$$|D^n_{i,j}| = |C^{x_0}_{i,n}(G[S_1])| \times |C^{y_0}_{j,n}(G[S_2])|,$$
puis $|D^n_{i,j}| = \frac{P_{G[S_1]}(n)P_{G[S_2]}(n)}{n^2}$.

4. En utilisant le principe de partition, montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad P_G(n) = \frac{n-1}{n} P_{G[S_1]}(n) P_{G[S_2]}(n).$$

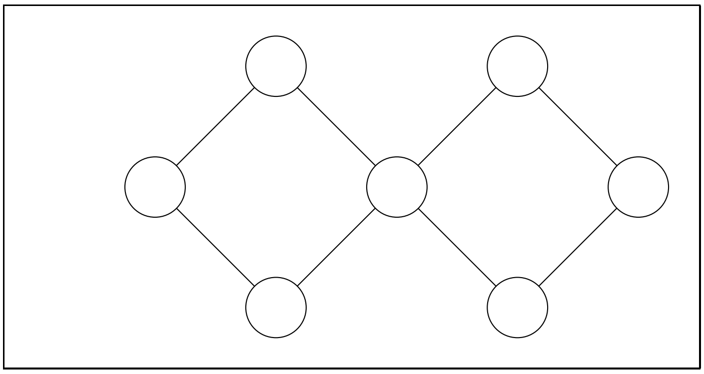
5. Montrer dans $\mathbb{R}(X)$ l'identité
$$P_G = \frac{X-1}{X} P_{G[S_1]} P_{G[S_2]}.$$

6. Calculer le polynôme caractéristique du graphe ci-dessous:



7. On pose $e = \{x_0, y_0\}$. Montrer que
$$P_{G.e} = \frac{1}{X} P_{G[S_1]} P_{G[S_2]}.$$

8. Calculer le polynôme caractéristique du graphe ci-dessous:



**FIN DE L'ÉPREUVE**